

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE PIURA  
ESCUELA DE POSGRADO**



**PROGRAMA DE MAESTRÍA EN MATEMÁTICA APLICADA  
TESIS**

**“PROPUESTA DE UN MODELO MATEMÁTICO PARA CONTROLAR LA  
PROPAGACIÓN DEL DENGUE EN LA CIUDAD DE PIURA”**

**PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRO EN MATEMÁTICA  
APLICADA**

**EJECUTORES**

**BACHILLER, ANGEL RAFAEL VICENTE MOROCHO**

**BACHILLER, RELLY PANTA PALACIOS**

**PIURA – PERÚ**

**FEBRERO – 2019**

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE PIURA**

**ESCUELA DE POSGRADO**



**PROGRAMA DE MAESTRÍA EN MATEMÁTICA APLICADA**

**SECCIÓN EN CIENCIAS**

**TESIS**

**“PROPUESTA DE UN MODELO MATEMÁTICO PARA CONTROLAR LA  
PROPAGACION DEL DENGUE EN LA CIUDAD DE PIURA”**

**LOS SUSCRITOS DECLARAMOS QUE EL PRESENTE TRABAJO DE TESIS ES  
ORIGINAL, EN SU CONTENIDO Y FORMA**

**BACH. ANGEL RAFAEL VICENTE MOROCHO  
EJECUTOR**

**BACH. RELLY PANTA PALACIOS  
EJECUTOR**

**DR. RICARDO VELEZMORO LEÓN  
ASESOR**

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE PIURA**

**ESCUELA DE POSGRADO**



**PROGRAMA DE MAESTRÍA EN MATEMÁTICA APLICADA**

**SECCIÓN EN CIENCIAS**

**TESIS**

**“PROPUESTA DE UN MODELO MATEMÁTICO PARA CONTROLAR LA  
PROPAGACION DEL DENGUE EN LA CIUDAD DE PIURA”**

**APROBADA EN CONTENIDO Y ESTILO POR:**

  
**DR. RAMÓN FRANCISCO CHIRINOS ZAMORA**  
**PRESIDENTE**

  
**DR. SANTOS MONTANO ROALCABA**  
**SECRETARIO**

  
**M.Sc. AMÉRICO CARRASCO TINEO**  
**VOCAL**

# ESCUELA DE POSGRADO

UNIVERSIDAD NACIONAL DE PIURA

## ACTA DE SUSTENTACIÓN

MAESTRÍA EN MATEMÁTICA APLICADA

Los Miembros del Jurado Calificador que suscriben, reunidos para la sustentación de la Tesis, para optar el Grado Académico de Maestro en **MATEMÁTICA APLICADA**.  
Presentada por:

**PANTA PALACIOS - RELLY**

Con el asesoramiento del DR. RICARDO VELEZMORO LEON, denominada:

**"PROPUESTA DE UN MODELO MATEMÁTICO PARA CONTROLAR LA  
PROPAGACIÓN DEL DENGUE EN LA CIUDAD DE PIURA"**

Oídas las respuestas y absueltas las observaciones formuladas, se declara:

APROBADO				DESAPROBADO
<i>Excelente</i>	<i>Sobresaliente</i>	<i>Bueno</i>	<i>Aceptable</i>	
_____	<u>X</u>	_____	_____	_____

En consecuencia, previa aprobación del Art.º 83, del Reglamento General de la Escuela de Posgrado, queda en condiciones de ser calificado **APTO** para obtener el Grado Académico de **MAESTRO EN MATEMÁTICA APLICADA**. De conformidad con lo estipulado en la ley.

PIURA, VIERNES 15 DE FEBRERO DEL 2019.

  
DR. RAMÓN FRANCISCO CHIRINOS ZAMORA  
PRESIDENTE

  
DR. SANTOS MONTANO ROALCABA  
SECRETARIO

  
M.Sc. AMERINO CARRASCO TINEO  
VOCAL

## **AGRADECIMIENTO**

Agradecemos a Dios por darnos su sabiduría y fortaleza para alcanzar esta meta.

Asimismo a todas aquellas personas que con sus recomendaciones y apoyo, nos han motivado a cumplir con nuestros objetivos e hicieron posible que culmináramos la elaboración de esta tesis.

Agradecer y reconocer al Dr. Ricardo Velezmoro León, por los consejos y los conocimientos que ha contribuido en el presente trabajo.

# **PROPUESTA DE UN MODELO MATEMÁTICO PARA CONTROLAR LA PROPAGACION DEL DENGUE EN LA CIUDAD DE PIURA**

(Febrero 2019)

**Bach. Ángel Rafael VICENTE MOROCHO**

**Bach. Relly PANTA PALACIOS**

Tesis de Maestría en Ciencias aplicadas presentada a la Escuela de Posgrado de la  
Universidad Nacional de Piura

## **RESUMEN**

En el trabajo de investigación se enfoca la propuesta y estudio de un modelo matemático que muestra la dinámica de transmisión del dengue y el crecimiento y control poblacional del *Aedes aegypti*, mosquito transmisor del virus de la enfermedad del dengue.

El modelo es planteado mediante un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales, que incluyen ecuaciones diferenciales ordinarias con retardo de tiempo en las variables de estado.

Para su estudio de este modelo se tiene en cuenta resultados numéricos de las soluciones.

Este modelo puede servir para programas de vigilancia y control, para futuras toma de decisiones con respecto a la enfermedad del dengue.

**Palabras clave:** Dengue, *Aedes Aegypti*, Control, Ecuaciones diferenciales con retardo.

**PROPOSAL OF A MATHEMATICAL MODEL TO CONTROL THE PROPAGATION  
OF THE DENGUE IN THE CITY OF PIURA**

(February 2019)

**Bach. Ángel Rafael VICENTE MOROCHO**

**Bach. Relly PANTA PALACIOS**

Master's Thesis in Applied Sciences presented to the Graduate School of the National  
University of Piura

**ABSTRACT**

The research work focuses on the proposal and study of a mathematical model that shows the dynamics of dengue transmission and the growth and population control of *Aedes aegypti*, a mosquito that transmits the dengue virus.

The model is proposed through a system of non-linear differential equations, which include ordinary differential equations with time delay in the state variables.

For the study of this model, numerical results of the solutions are taken into account.

This model can be used for surveillance and control programs for future decision making regarding dengue disease.

**Key words:** Dengue, *Aedes Aegypti*, Control, Differential equations with delay.

## ÍNDICE

RESUMEN.....	6
ABSTRACT.....	7
ÍNDICE.....	8
INDICE DE TABLAS.....	12
INDICE DE FIGURAS .....	13
CAPÍTULO I: INTRODUCCIÓN .....	14
CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO .....	16
2. ASPECTOS METODOLÓGICOS DE LA INVESTIGACIÓN .....	16
2.1. Introducción .....	16
2.2. Lugar de investigación.....	16
2.3. Planteamiento del problema.....	17
2.3.1. Descripción de la realidad problemática .....	17
2.3.2. Formulación del problema.....	17
2.3.3. Justificación de la investigación .....	18
2.3.4. Limitaciones y viabilidad.....	18
2.4. Objetivos.....	19
2.4.1. Objetivo General.....	19
2.4.2. Objetivos Específicos .....	19
2.5. Hipótesis y Variables .....	20
2.5.1. Hipótesis .....	20
2.5.2. Variables .....	20
2.6. Metodología .....	20



2.6.1.	Tipo de Investigación.....	20
2.6.2.	Diseño de la investigación.....	20
2.6.3.	Población y Muestra .....	20
2.6.4.	Instrumento de recolección de datos .....	21
2.7.	Bases teóricas .....	21
2.7.1.	Antecedentes de la investigación.....	21
2.7.1.1.	Antecedentes Regionales.....	21
2.7.1.2.	Antecedentes Nacionales .....	22
2.7.1.3.	Antecedentes Internacionales .....	24
2.7.2.	Aspectos epidemiológicos.....	27
2.7.2.1.	Dengue.....	27
2.7.2.2.	Descripción del Dengue.....	27
2.7.2.3.	Tipos de Dengue.....	29
2.7.2.4.	Historia .....	30
2.7.2.5.	Hábitat.....	31
2.7.3.	Métodos de control .....	32
CAPITULO III: PRELIMINARES MATEMÁTICOS.....		33
3.	PARÁMETROS.....	33
3.1.	Estimación de parámetros.....	33
3.1.1.	Tasa de Letalidad .....	33
3.1.2.	Tasa de Mortalidad Específica .....	33
3.1.3.	Tasa de Mortalidad Proporcional .....	33

3.1.4.	Probabilidad.....	34
3.1.5.	Probabilidad condicional .....	34
3.1.6.	Estimación de Máxima Verosimilitud .....	34
3.1.7.	Probabilidad de transmisión del virus del vector al hombre .....	35
3.1.8.	Probabilidad de transmisión del virus del hombre al vector .....	36
3.2.	Ecuaciones diferenciales ordinarias con retardo .....	36
3.3.1.	Espacio de estados .....	36
3.3.2.	Variable de estado.....	36
3.3.3.	Ecuación Diferencial con Retardo.....	36
3.3.4.	Problema de Valor Inicial .....	37
3.3.5.	Solución de un PVI con EDR .....	37
3.3.	Análisis de existencia y unicidad de solución para las Ecuaciones Diferenciales con Retardo .....	37
3.3.1.	Constante de <i>Lipschitz</i> .....	37
3.3.2.	Lema:.....	38
3.3.3.	Lema: Gronwall-Reid.....	38
3.3.4.	Teorema: Existencia y Unicidad de solución para las EDR .....	39
CAPITULO IV: MÉTODO Y MATERIALES.....		44
4.	MODELO MATEMÁTICO PARA CONTROLAR LA PROPAGACION DEL DENGUE.....	44
4.1.	Modelo Matemático .....	44
4.2.	Descripción de las ecuaciones diferenciales con retardo del modelo matemático propuesto.....	49

CAPITULO V: DISCUSIÓN Y RESULTADOS.....	52
5. SOLUCIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO EN ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS .....	52
5.1. Método de Runge Kutta para resolver numéricamente las ecuaciones diferenciales con retardo .....	52
5.2. Aplicación del método de Runge Kutta con tamaño de paso fijo para las ecuaciones diferenciales con retardo .....	52
5.3. Aplicación del método de Runge Kutta con tamaño de paso variable para las ecuaciones diferenciales con retardo .....	56
5.4. Consistencia de los métodos de Runge Kutta para las ecuaciones diferenciales con retardo.....	59
5.5. Implementación numérica .....	60
5.5.1. Función edr43.....	60
5.5.2. Función edr433.....	60
5.6. Simulación del modelo .....	61
5.7. Discusión de los resultados.....	62
5.7.1. Comportamiento de la Población Humana .....	62
5.7.2. Comportamiento del Mosquito .....	64
CONCLUSIONES.....	67
RECOMENDACIONES .....	68
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	69
Referencias.....	69
Bibliografía.....	69
ANEXOS .....	72

## INDICE DE TABLAS

<b><u>Tabla</u></b>	<b><u>Página</u></b>
Tabla 1: Variables utilizados en el planteamiento del modelo	47
Tabla 2: Parámetros utilizados en el planteamiento del modelo	48
Tabla 3: Valores de los Parámetros	61

## INDICE DE FIGURAS

<b><u>Figura</u></b>	<b><u>Página</u></b>
Figura 1: Mosquito <i>Aedes Aegypti</i>	28
Figura 2: Estimación de Máxima Verosimilitud	35
Figura 3: Diagrama del compartimiento de la enfermedad	45
Figura 4: Inicio de la simulación del modelo matemático	62
Figura 5: Comportamiento de Humanos Susceptibles	62
Figura 6: Comportamiento de Humanos Infecciosos	63
Figura 7: Comportamiento de Humanos Infecciosos	63
Figura 8: Comportamiento de Mosquitos No Portadores	64
Figura 9: Comportamiento de Mosquitos Portadores	64
Figura 10: Comportamiento de los Huevos	65
Figura 11: Comportamiento de las Larvas	65
Figura 12: Comportamiento de las Pupas	66

## CAPÍTULO I: INTRODUCCIÓN

El dengue en el departamento de Piura, especialmente en la provincia de Piura representa un problema prioritario en salud pública debido a la emergencia e intensa transmisión con tendencia creciente, el comportamiento de ciclos epidémicos cada dos o tres años, el aumento en la frecuencia de brotes de dengue grave, la circulación simultánea de diferentes serotipos, la reintroducción del serotipo tres, la infestación por *Aedes aegypti* de más de 90 % del territorio nacional situado por debajo de los 2.200 msnm, la introducción de *Aedes albopictus* y la urbanización de la población por problemas de violencia.

Piura es uno de los 24 departamentos, se encuentra ubicado en la zona norte del país, abarcando zonas de la costa, sierra y selva. Limita al norte con Tumbes y Ecuador. La mayor parte del territorio tiene una geografía variada. La población censada hasta el 2016 es de unos 1 858 617 habitantes según el INEI. Según el informe del ministerio de salud de Perú en el periodo comprendido entre el 2015-2017 hasta la segunda semana de junio del año 2017, el departamento de Piura se encuentra en aumento de casos de dengue y los casos más registrados se encuentran en el distrito de Piura.

La aplicación de los modelos matemáticos al análisis de situaciones biológicas, se remonta a la edad media. Los modelos epidemiológicos están dados generalmente por sistemas dinámicos, que explican relaciones entre las diferentes variables epidemiológicas. El objetivo de la construcción de un modelo es acercarse a un sistema capaz de imitar los procesos naturales, tales como la propagación de enfermedades, la dinámica de una infección en una comunidad, la relación existente entre los diferentes estados epidemiológicos de la enfermedad y los parámetros involucrados, la simulación de situaciones reales o hipotéticas o la valoración y evaluación de intervenciones en el control de enfermedades; otros modelos epidemiológicos han sido orientados a la solución de problemas específicos, a través del diseño de la dinámica de una infección o del planteamiento de programas de control.

Presentamos un modelo que interpretan la dinámica de transmisión de un serotipo de dengue mediante sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales donde se usarán tiempos de retardo para los diferentes estados de desarrollo del mosquito vector transmisor del dengue y se usaran dos mecanismos de control: preventivo en los humanos y químico en los adultos y larvas del mosquito.

## **CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO**

### **2. ASPECTOS METODOLÓGICOS DE LA INVESTIGACIÓN**

#### **2.1. Introducción**

Los modelos matemáticos existentes que dan cuenta de la dinámica de una epidemia son, en general, modelos muy simples y dados en ecuaciones diferenciales ordinarias, ya que así es más sencillo obtener una solución analítica de dicho modelo, o al menos una aproximación a la solución buscada.

La mayoría de los modelos matemáticos tratan de plantearse tomando como base una epidemia de forma muy general, es decir, tomando en cuenta que existen infectados, sanos o muertos.

En el presente trabajo se tomara como base de datos los registrados por la DIRESA pero en la ciudad de Piura. Para observar el comportamiento del modelo, que sería un caso particular de toda la Región Piura.

#### **2.2. Lugar de investigación**

Ciudad de Piura específicamente la provincia de Piura



## **2.3. Planteamiento del problema**

### **2.3.1. Descripción de la realidad problemática**

Las enfermedades infecciosas ha sido a través de los siglos, causa de innumerables muertes y sufrimientos. En muchos países año tras año diezman a la población, bien sea por falta de recursos para controlar la epidemia o por carencia de una vacuna adecuada.

Para la mayoría de las enfermedades infecciosas se conoce cuál es el virus que la causa y como es el proceso de transmisión de un individuo infeccioso a uno sano. Se conoce así mismo, los diversos factores relacionados con la enfermedad tales como: periodos de latencia, periodos de infección, susceptibilidad, inmunización, e incluso factores culturales, sociales, demográficos y geográficos. Pero, la forma como esta enfermedad se transmite en una población (a cuántos afecta, en que tiempo se propaga, cuán lejos puede llegar) es compleja, por lo cual es difícil dar la dinámica global de la misma.

### **2.3.2. Formulación del problema**

¿Será posible proponer un modelo matemático para controlar la propagación del dengue en la provincia de Piura?

### 2.3.3. Justificación de la investigación

Esta investigación ayuda a conocer que es el dengue, cuáles son sus principales causas, cuales son algunos de los tratamientos para su erradicación, además de exponer algunas formas de prevención para esta enfermedad.

Su relevancia social es principalmente la que ayudara a que se tome conciencia de que esta enfermedad puede ser prevenible con los cuidados adecuados, que se conozca la forma de propagación del dengue y de la severidad con que puede atacar a las personas.

La trascendencia de esta investigación radica principalmente en que se podrá ayudar a conocer más a fondo las características del dengue, su forma de propagación, la relación que este tiene con algunos hábitos culturales y/o ambientales para lograr dentro de lo posible su prevención e incluso su erradicación.

### 2.3.4. Limitaciones y viabilidad.

**Viabilidad:** Con la investigación se pretende obtener pautas a cerca el conocimiento que las personas poseen con respecto a las actividades de prevención del Dengue, y con el uso del abate Themephos como medio de prevención de la misma. Además de ello, tener una idea a cerca de la morbilidad causada por el ***Aedes aegypti*** durante el año 2017, para marcar un precedente.

**Limitaciones:** Impulsar a las personas de la comunidad para investigar sobre aspectos que ayuden a prevenir el criadero de los ***Aedes Aegypti***, además de poner los mismos en práctica.

## **2.4. Objetivos**

### **2.4.1. Objetivo General**

Proponer un modelo matemático para controlar la propagación del dengue en la provincia de Piura y conocer la dinámica de transmisión del dengue.

### **2.4.2. Objetivos Específicos**

- Estudiar mediante el modelo matemático el comportamiento del mosquito *Aedes Aegypti* y de la población afectada.
- Explicar el funcionamiento del modelo matemático mediante un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales.
- Proponer una herramienta precisa y sostenible a tener en cuenta para apoyar de forma científica la toma de decisiones en los programas de vigilancia y control del Dengue.
- Visualizar las soluciones de las ecuaciones diferenciales no lineales que influyen en el modelo propuesto con ayuda del software científico Matlab.

## **2.5. Hipótesis y Variables**

### **2.5.1. Hipótesis**

Es posible proponer un modelo matemático que permita controlar la propagación del dengue en la provincia de Piura.

### **2.5.2. Variables**

- ❖ Población Humana: Susceptibles, Infecciosos e inmunes.
- ❖ Población del Mosquito: Mosquito maduro(portadores y no portadores) y Mosquito inmaduro(Huevos, Larvas y Pupas)

## **2.6. Metodología**

### **2.6.1. Tipo de Investigación**

Estudio de investigación aplicada, observacional, descriptivo con enfoque mixto.

Adquirir conocimiento sobre la enfermedad del dengue.

### **2.6.2. Diseño de la investigación**

El modelo matemático propuesto está representado por ocho ecuaciones diferenciales con retardos constantes. Cada ecuación representa la variación de cada subpoblación tanto en los humanos como en el mosquito transmisor.

### **2.6.3. Población y Muestra**

Provincia de Piura

#### **2.6.4. Instrumento de recolección de datos**

Base de datos recolectada por la DIRESA – Piura

Se presenta un escenario de simulación del modelo matemático resuelto mediante un algoritmo implementado en el software MATLAB con datos obtenidos del Ministerio de Salud (MINSA) Dirección General de Epidemiología y la revisión de literatura. En el escenario se analizan tanto la población humana como la del mosquito, con la utilización o no de controles.

### **2.7. Bases teóricas**

#### **2.7.1. Antecedentes de la investigación**

##### **2.7.1.1. Antecedentes Regionales**

El departamento de Piura ha experimentado la presencia de brotes en forma irregular a lo largo de los años, destacando el 2009, con circulación del serotipo DENV-1 y DENV-4; siendo el brote de dengue con mayor magnitud en el año 2010, con serotipo circulante DENV-1, que afectó a 12 distritos entre los siguientes: Piura, Castilla, Morropón, Paita, Tambogrande, Los Órganos, Las Lomas, Salitral, Suyo, La Huaca, La Matanza y Catacaos.

El departamento de Piura notificó 417 casos de dengue hasta la SE 14-2014, que representa el 5,4 % del total de casos notificados del país, con una TIA 23/100 000 hab. Del total de casos, 390 (93,5 %) DSSA, 25 (6 %) DCSA y 2 casos graves (0,5 %). Piura notificó 3 defunciones confirmadas y una letalidad de 0,7 %. Del total de casos, el 26,6 % (111)

son confirmados. El 93,8 % (391/417) de los casos están concentrados en 4 distritos: Piura 84,9 % (354), Castilla 3,8 % (16), Sullana 3,4 % (14) y Tambo Grande 1,7 % (7).

Los índices aédicos levantados durante la vigilancia entomológica del mes de marzo 2014 en el distrito de Chulucanas fluctúa en 1,3 %, Bellavista 1,2 %, Morropón 0,3 %, Cura Mori 18,9 % Querecotillo 5,4 % y Sullana entre 0,2-3,0 %.

El serotipo circulante hasta marzo 2014 es el DENV2 (genotipo Asia /América).

El dengue afecta principalmente a la población joven y en edad productiva, la edad promedio de los casos es 31 años y el 59% se encuentran entre 20 y 60 años. El 56,8% de los casos son de sexo femenino. MINISTERIO DE SALUD (2014)

#### **2.7.1.2. Antecedentes Nacionales**

Definición: En nuestro país durante el año 2 001 se reportaron 23 053 casos de Dengue (Organización Panamericana de la Salud); siendo Piura, Tumbes, y Ucayali los departamentos más afectados por esta epidemia. Pero... ¿qué hay del departamento de Lima?, ¿existen casos de Dengue?, ¿en qué distritos?

El dengue constituye un creciente problema de salud pública en la mayor parte de las zonas tropicales de Asia Sudoriental y el Pacífico Occidental; no obstante, desde hace poco más de 20 años se ha extendido a algunos países de América que poseen este tipo de clima en sus territorios como Perú, Cuba, Venezuela, Brasil, entre otros.

En Perú, el dengue cobra importancia a mediados de los años 80 en los departamentos de la selva y del norte de la costa (Piura, Tumbes y Ucayali), habiéndose reportado un considerable número de personas con esta enfermedad.

Aunque esta enfermedad es propia de zonas cálidas o tropicales, últimos estudios han probado que Lima no se encuentra libre de sufrir una epidemia. Desde el año 2 000 el zancudo *Aedes Aegypti*, transmisor del virus del Dengue, ha sido encontrado en los distritos del Rímac y San Juan de Lurigancho; siendo este último el que presenta un mayor número de localidades infestadas.

Las precarias condiciones sanitarias en las que se encuentran las diversas localidades del distrito debido a la nula o deficiente educación sanitaria por parte de la población; aumenta aún más el riesgo de la diseminación del zancudo y con ello la propagación de la enfermedad, acrecentándose el peligro de una epidemia en el distrito. Ministerio de Salud (2005)

### 2.7.1.3. Antecedentes Internacionales

El dengue es actualmente una de las enfermedades que afectan al hombre y constituye un severo problema de salud pública en el mundo, especialmente en zonas tropicales y subtropicales donde las condiciones del medio ambiente favorecen el desarrollo y la proliferación del *Aedes Aegypti*, el cual es el principal mosquito vector. El agente causal es un virus de la familia Flaviviridae: arbovirus (arthropod-borne); se reconocen por variación de la proteína E, 4 tipos antigénicos llamados DEN-1, DEN-2, DEN-3 o DEN-4, los cuales son transmitidos a los humanos por la picadura de un mosquito infectado.

Las entidades de salud pública del mundo se han puesto en la tarea de disminuir la incidencia del dengue, para ello recurren a varios tipos de controles, ya sea de manera manual o por la utilización de insecticidas. Mediante el primer método se pueden destruir los criaderos, método que depende de la participación de la población humana, mientras que el uso de los insecticidas ha tenido mayor éxito en controlar el vector. Pero con el paso del tiempo, los vectores adquieren resistencia a estos químicos (de generación en generación), volviéndose más resistentes y constituyendo una limitante importante para su control. Leonardo D. Restrepo-Alape, Hernán D. Toro-Zapata y Aníbal Muñoz-Loaiza (2010)

El mosquito *Aedes Aegypti* es de hábitos típicamente domiciliarios, se cría en climas tropicales húmedos y pica con mayor frecuencia entre las 06:00 a 08:00 horas y las 17:00 a 19:00 horas del día. Su ciclo de vida comprende: el huevo, cuatro estados larvarios, un estado de pupa y el



mosquito adulto; las tres primeras corresponden a la etapa acuática (mosquito inmaduro) y la última a la etapa aérea (mosquito maduro). La oviposición y los estados larvarios se desarrollan en depósitos de agua, generalmente limpia formados en objetos abandonados o en recipientes destinados al almacenamiento de agua para el consumo humano. Los sitios de cría son superficialmente artificiales: urbanos como cementerios y basurales, o domésticos como neumáticos, floreros, botellas, bebederos de animales, latas abiertas o contenedores de cualquier tipo. Organización Panamericana de la Salud(OPS) (2011).

Aún no se ha aprobado una vacuna que brinde inmunidad temporal o permanente contra todos los serotipos del virus, ya que los conocimientos que se tienen acerca de la patogénesis de la enfermedad y las respuestas inmunitarias protectoras son limitados. Sin embargo, dos vacunas experimentales se encuentran en fase de evaluación clínica en países endémicos, mientras que otras están en fase de desarrollo. Es por eso, que en el momento la única alternativa que se tiene para erradicar la enfermedad, es hacer un control del mosquito transmisor. Adams B K. D. (2009).

Se puede mencionar que en el año 2 000, se realizó un modelo matemático de la epidemia del dengue, donde se da a conocer un modelo matemático dándole solución en ecuaciones diferenciales ordinarias y en ecuaciones en derivadas parciales. Mora (2 000).

En el año 2006 se hace una investigación hacia la construcción de un modelo de simulación de la transmisión del dengue en Colombia. Donde se realizó un modelo de simulación de la ecología del vector y de la transmisión del dengue con ecuaciones diferenciales ordinarias. Santiago Velez (2006).

Encontramos un trabajo de investigación sobre el modelo de la transmisión del dengue clásico durante un brote epidémico. Donde se plantea un problema El modelado espacio - temporal con difusión de la dinámica de transmisión e incidencia del dengue sin control y como un problema de control óptimo mediante control químico y mecánico del *Aedes Aegypti*. Donde se trabaja con ecuaciones diferenciales parciales para los modelos matemáticos para el control del dengue. Zapata (2010).

En el año 2012 se presentó una tesis llamada Modelos y Control Óptimo Poblacional del *Aedes Aegypti* con Retardos de Tiempo, donde se trató un modelo matemático para el control del dengue con ecuaciones diferenciales ordinarias y se realizó una discusión de los resultados obtenidos. Montenegro (2012).

## **2.7.2. Aspectos epidemiológicos**

### **2.7.2.1. Dengue**

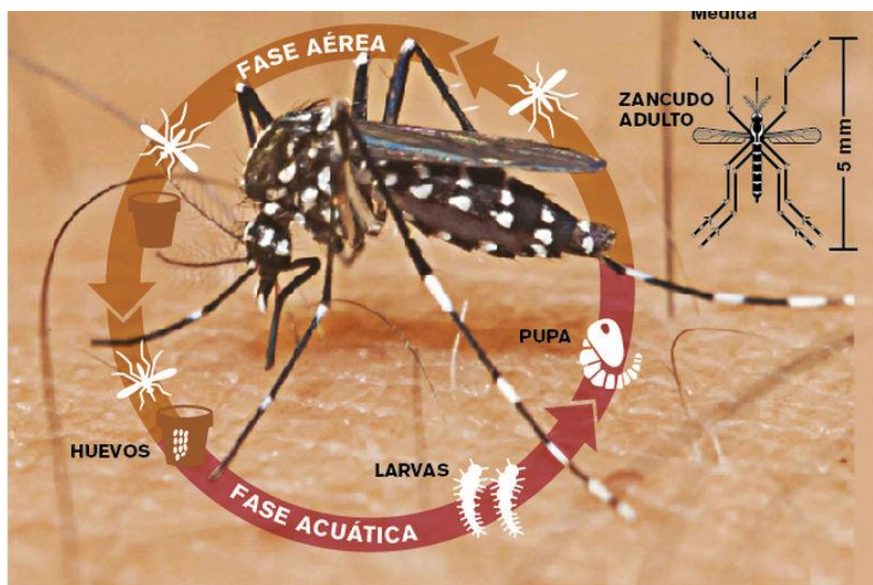
Es una enfermedad viral propagada al hombre mediante la picadura de mosquitos de la familia *Aedes Aegypt*. Existen tres tipos de esta enfermedad: dengue clásico (DC), dengue hemorrágico (DH) y síndrome de choque por dengue (SCD).

En el siglo XX el dengue en las Américas fue catalogado como uno de los problemas más importantes en salud pública, debido a la rápida propagación del vector en Piura. Desde entonces se han venido desarrollando diferentes campañas de erradicación del mosquito bajando la tasa de transmisión en la población. Sin embargo, este mecanismo no ha sido suficiente, ya que a medida que pasa el tiempo la enfermedad tiende a propagarse con más rapidez en las regiones tropicales.

### **2.7.2.2. Descripción del Dengue**

El Dengue es una enfermedad infecciosa producida por un virus, transmitido por un artrópodo, por lo tanto es un arbovirus, cuyo vector es el mosquito *Aedes Aegypti*. La puede adquirir cualquier persona, pero la gravedad de esta enfermedad depende de la edad y del estado de salud.

Este Mosquito es de color café oscuro o negro, con manchas blancas en el tórax y en las patas.



**Figura 2.1:** Mosquito *Aedes Aegypti*

**Fuente:** <http://www.pascolibre.com/2017/04/confirman-casos-del-zika-chikungunya-y.html>

Período de Incubación es de 3 a 14 días.

Esta enfermedad se transmite por medio del mosquito hembra que se alimenta preferiblemente de sangre humana para desarrollar sus huevos. Puede picar a cualquier hora del día y de la noche, pero generalmente lo hace en la mañana y en horas de la tarde. Cuando el mosquito se alimenta con sangre de una persona enferma de dengue y luego pica a otras personas les transmite esta enfermedad 3/10.

Los síntomas del Dengue Hemorrágico son: Temperatura súbitamente alta de 2 a 7 días. Sangrado en diferentes partes del cuerpo. Dificultad de respiración. Inflamación en la cara. Enrojecimiento de la cara. Vómito o diarrea. Alteraciones en la presión. Falta de apetito. Palidez, sudoración y sueño.

### **2.7.2.3. Tipos de Dengue**

Los virus del dengue incluyen los tipos inmunológicos Den-1, Den-2, Den-3 y Den-4. La infección por cualquier serotipo contiene inmunidad específica duradera por el resto de la vida; Cabe indicar que la infección con el serotipo DEN-1 deja como resultado la inmunidad homotípica para toda la vida, pero protege heterotípicamente de dos a doce meses.

Después de este tiempo los individuos teóricamente pueden ser infectados por cualquier otro serotipo de Dengue.

Teniendo una técnica de separación de subgrupos genéticos, que pertenecen a un único serotipo, los virólogos han determinado por un análisis de secuencia de nucleótidos que el DEN-1 y el DEN-2 tienen cinco genotipos, DEN-3 tiene cuatro y el DEN-4 tiene dos subgrupos. La primera vez que una persona es contagiada por cualquiera de estos 4 virus, adquiere el dengue clásico. Nunca volverá a padecer dengue, por el mismo virus pero sigue expuesta a los demás serotipos.

Si la persona vuelve a ser picada por un mosquito, portador de uno de los tres restantes virus, puede sufrir el dengue hemorrágico. Por eso decimos que el dengue la primera vez golpea, la segunda vez mata.

**Recomendaciones En Caso De Sospechas:** Beba abundante líquido o suero oral, especialmente si hay vómitos o diarrea. Mantenga reposo. Tome acetaminofén en caso de dolor intenso, (nunca aspirina, porque puede favorecer las hemorragias). Acuda al médico de inmediato si presenta: sangrado, dificultades en la respiración, inflamación en la cara, vómitos o diarreas, alteraciones en la presión, palidez, sudoración y somnolencias.

#### **2.7.2.4. Historia**

Existiendo reportes de la enfermedad clínicamente, desde hace cientos de años como se registra en el año de 1699 en Panamá, año 1700 Lima - Perú. Año 1844-1849 Río de Janeiro -Brasil, año 1897-1899 San Juan Puerto Rico. Año 1901-1907 La Habana Cuba, año 1940-1945 región del Caribe.

En el año 1970 los esfuerzos de los países por erradicar el vector terminaron. En 1977 se aísla el Dengue en Jamaica, en 1982 en Brasil, produciéndose la mayor epidemia en 1981 en Cuba, es decir entre los años 1980 a 1990 se producen epidemias de Dengue en los países de América Latina causadas por el DEN-1, Incluyendo al Ecuador en 1988.

Después de la epidemia de Dengue en 1988 en el Ecuador al DEN-1 se continuó realizando la vigilancia virológica por parte del instituto Nacional de Higiene y Medicina Tropical (I.N.H.), en los inicios de 1992 se detectó DEN-4 en la ciudad de Guayaquil y para el año 1993 DEN-2; circulando en el país tres serotipos de dengue hasta el año 1999.

A inicios del año 2000 se aísla DEN-2 tipo asiático diferente al DEN-2 Americano que ya circulaba en el país, en las provincias Sucumbíos y Guayas (enero), luego se confirma en febrero del presente año la circulación de DEN-3 en la ciudad de Guayaquil. En Ecuador, especialmente la ciudad de Guayaquil sufrió epidemia al DEN-1 por primera vez en 1988, que luego con el de los años se infectó con otros serotipos anteriormente descritos por lo que se podría pensar que la epidemia que hubo en año 2000 haya sido dada debido, a la

introducción de los serotipos DEN-2 Asiático y DEN-3 los mismos que no existían en nuestro País.

Se han ido dispersando con el pasar del tiempo a la provincia del Guayas, ya para el año 2001, se viene monitoreando los casos de Dengue Hemorrágico, obteniéndose para este año el mayor número de casos confirmados en la ciudad de Guayaquil de la provincia del Guayas, así como la confirmación de casos en las provincias de Los Ríos, Manabí, El Oro, Pichincha, Bolívar y Pastaza con 54 casos en el año 2003 se han confirmado 453 casos.

#### **2.7.2.5. Hábitat**

Su distribución está asociada a la presencia del *Aedes Aegypti*, por lo que es de distribución mundial, esta especie de vector preferentemente se encuentra entre 30° Latitud Norte y 20° Latitud Sur, hasta 2,200 metros de altura sobre el nivel del mar. Ocurriendo la transmisión geográficamente en áreas tropicales y subtropicales.

La hembra deposita los huevos en agua limpia y estancada o en lugares húmedos, dentro y alrededor de casa. En los criaderos, los huevos se convierten en larvas, luego en pupas y finalmente en mosquito. Los huevos son depositados en las paredes de los recipientes y si no se mojan, pueden permanecer conservados por largos períodos. Una vez que toca el agua empieza su desarrollo. Los huevecillos pueden estar infectados con el virus, de tal manera que, desde el nacimiento puede ser un transmisor de la enfermedad.

### 2.7.3. Métodos de control

En la utilización de mecanismos de control para la erradicación del mosquito se emplean tres tipos:

**Control mecánico o preventivo:** Se basa estrictamente en la gestión del medio, es decir, inclusión de programas comunitarios para que los habitantes de zonas en riesgo hagan una eliminación adecuada de los recipientes tales como baldes, tarros, latas, etc. los cuales son utilizados por los mosquitos hembra como criaderos y general la mejora de las prácticas de almacenamiento de agua potable.

**Control químico:** Se basa en la aplicación de productos químicos como insecticidas y larvicidas, regulándolos a la sensibilidad de los mosquitos para asegurar una elección apropiada. Entre los más importantes están: Malathion (insecticida, excelente para controlar larvas y adultos) y Temephos 1 % (larvicida abate).

**Control biológico:** Se basa en la utilización de otros seres vivos que sirven como depredadores del mosquito, entre los cuales están: mosquitos que en estado larval depredan otras larvas (Toxorhynchites), peces larvívoros (Gambusia affinis, Poecilia reticulata, tilapia), bacterias que producen la muerte a la larva (Bacillus thuringiensis) y organismos microscópicos como protozoarios.



## CAPITULO III: PRELIMINARES MATEMÁTICOS

### 3. PARÁMETROS

#### 3.1. Estimación de parámetros

Los parámetros utilizados se ajustan por el método de máxima verosimilitud son tomados de los indicadores básicos de salud de la OMS. Según [17]

##### 3.1.1. Tasa de Letalidad

$$\text{Tasa de Letalidad} = \frac{\text{Nº de muertes en un período determinado}}{\text{Nº de casos diagnosticados de la enfermedad en el mismo período}} \times 100\%$$

Es una medida para cuantificar la gravedad de una enfermedad.

##### 3.1.2. Tasa de Mortalidad Específica

$$\text{Tasa de Mortalidad Específica} = \frac{\text{Nº de muertes por una enfermedad en un período determinado}}{\text{Población en el mismo período}} \times 100\%$$

Es una medida para cuantificar el riesgo de morir entre enfermos.

##### 3.1.3. Tasa de Mortalidad Proporcional

$$\text{Tasa de Mortalidad Proporcional} = \frac{\text{Muertes por una enfermedad en un área y tiempo}}{\text{Total de muertes en esa área y tiempo}} \times 100\%$$

Es una medida para cuantificar la proporción de muertes causadas por esta enfermedad del total de las muertes ocurridas en una población determinada.

#### 3.1.4. Probabilidad

La probabilidad  $p$  de un evento  $A$  se define como sigue: si  $A$  puede ocurrir de  $s$  maneras entre un total de  $n$  igualmente posibles, entonces:  $p = P(A) = \frac{s}{n}$ . Según [17]

#### 3.1.5. Probabilidad condicional

Sea  $E$  un evento arbitrario de un espacio muestral  $S$  con  $P(E) > 0$ . La probabilidad de que un evento  $A$  suceda una vez que  $E$  haya sucedido o, en otras palabras, la probabilidad condicional de  $A$  dado  $E$ , que se escribe  $P(A/E)$ , se define:  $P(A/E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)}$ . Según [17]

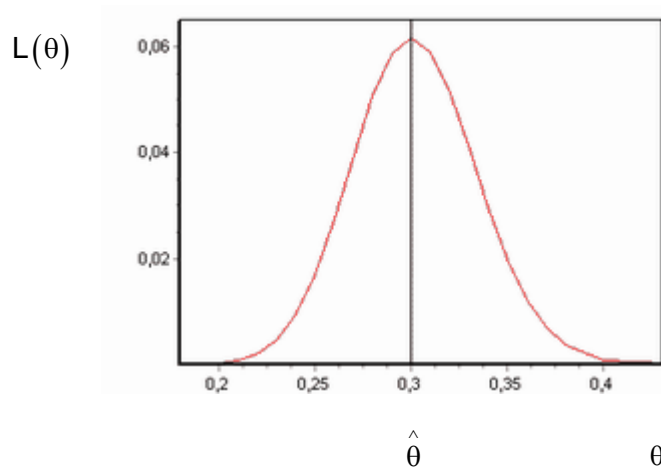
#### 3.1.6. Estimación de Máxima Verosimilitud

Este método representa un procedimiento que permite estimar los parámetros de un modo probabilístico, o los coeficientes de un modelo matemático, de tal manera que sean lo más probables a partir de los datos obtenidos. Según [17]

Dada la densidad  $f_{\theta}(x)$  y un conjunto de valores aleatorios muestreados  $(x_1, \dots, x_n)$ , se conforma la función de densidad de la muestra, o función de verosimilitud:  $L(\theta) = \prod_{i=1}^n f_{\theta}(x_i)$ .

Dado que las  $x$  son valores conocidos, la cantidad  $L$  sólo depende del parámetro  $\theta$ . Es decir, si  $h$  representa el número de aciertos de un evento  $A$ , con  $n$  el total de veces que ocurrió, y  $n-h$  el número de fracasos; la función de

verosimilitud para el evento A es:  $L(\theta) = \frac{n!}{h!(n-h)!} \theta^h (1-\theta)^{n-h}$ , y su representación gráfica es:



**Figura 2:** Estimación de Máxima Verosimilitud, Según [17].

La función  $L(\theta)$  es diferenciable y tiene un máximo local en un punto interior del intervalo. El estimador máximo verosímil  $\hat{\theta}$  satisface:  $\frac{dL(\theta)}{d\theta} = 0$ , por lo tanto su máximo

valor es:  $\hat{\theta} = \frac{h}{n}$ .

### 3.1.7. Probabilidad de transmisión del virus del vector al hombre

Este parámetro se toma igual a la razón de contagio en la población humana, ya que la única posibilidad de que se transmita el virus es por la picadura del mosquito, es decir  $\beta_y = 0.1$ . Según [17]

### 3.1.8. Probabilidad de transmisión del virus del hombre al vector

En el modelo se asume que la picadura de un mosquito infectado produce un nuevo individuo infectado en la población humana, es decir  $\beta_x = 0.1$ . Según [17]

### 3.2. Ecuaciones diferenciales ordinarias con retardo

Para estudiar modelos con sistemas dinámicos, se representa mediante una ecuación diferencial (o conjunto de ellas). En el caso orientado a un sistema biológico que evoluciona en el tiempo  $t$  se denominará **estado** a la variable incógnita  $x$  que depende de  $t$  y es la que caracterizará el estado de un sistema en equilibrio. Según [16]

#### 3.3.1. Espacio de estados

**Definición:** Sea  $\tau \geq 0$ , el conjunto  $C([- \tau, 0], \mathbb{R}^n)$  será denotado como  $\mathbf{C}$  y se le llamará espacio de estados. Según [16]

#### 3.3.2. Variable de estado

**Definición:** Sea  $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función continua,  $t \in \mathbb{R}$  y  $\mathbf{C}$  un espacio de estados, definimos  $x_t: [- \tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$  talque  $x_t(\theta) = x(t + \theta)$ ,  $\forall \theta \in [- \tau, 0]$ ,  $x_t$  se llamará variable de estado o estado del sistema en el tiempo  $t$ . Según [16]

#### 3.3.3. Ecuación Diferencial con Retardo

**Definición:** Una ecuación diferencial con retardo (**EDR**) es una ecuación de forma  $x'(t) = f(t, x(t), x(t-r))$ , donde  $f$  es una función continua dada y  $r > 0$  es un parámetro que se le denomina retardo. Según [16]

### 3.3.4. Problema de Valor Inicial

**Definición:** Un problema de valor inicial asociado a una EDR está dado por:

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t-r)), \quad \forall t \geq \sigma \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$x_\sigma = \phi \quad \dots\dots\dots(2)$$

Donde  $\sigma \in \mathbb{R}$  es el tiempo inicial,  $\phi \in C$  es el estado en el tiempo  $\sigma$  y  $f: \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función continua. Según [16]

### 3.3.5. Solución de un PVI con EDR

Una solución del problema de valor inicial  $((1)-(2))$  es una función

$x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  que satisface  $((1)-(2))$ .

**Observación:**

En estas ecuaciones, el comportamiento de las soluciones en un instante  $t$  depende no sólo de la posición  $x(t)$  en ese instante sino también del valor en un instante anterior  $x(t-r)$ . Según [16]

## 3.3. Análisis de existencia y unicidad de solución para las Ecuaciones

### Diferenciales con Retardo

#### 3.3.1. Constante de *Lipschitz*

**Definición:** Decimos que  $f$  es una función *Lipschitz* en un conjunto acotado de

$\mathbb{R} \times C$  si  $\forall a, b \in \mathbb{R}$  y  $M > 0$ ,  $\exists K > 0$ , tal que:

$$\|f(t, \phi) - f(t, \psi)\| \leq K \|\phi - \psi\|, \quad a \leq t \leq b, \quad \|\phi\|, \|\psi\| \leq M \quad \dots\dots\dots(3)$$

### 3.3.2. Lema:

Sea  $f: \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función continua que satisface (3), entonces en cada intervalo  $[a, b]$  y  $M > 0$ ,  $\exists L > 0$ , tal que:  $|f(t, \psi)| \leq L$ ,  $\forall t \in [a, b]$ ,  $\|\psi\| \leq M$ .

#### Prueba:

Denotemos por  $0_C$  la función nula en  $C$ , entonces al ser  $f$  una función *Lipschitz*:

$$|f(t, \psi)| \leq |f(t, \psi) - f(t, 0_C)| \leq K \|\psi - 0_C\| + |f(t, 0_C)|$$

donde  $P = \max_{a \leq t \leq b} |f(t, 0_C)|$

### 3.3.3. Lema: Gronwall-Reid

Sea  $B$  una constante dada,  $k$  una función continua no negativa en un intervalo  $I$ , donde  $I = [t_0, t]$ . Si  $x: I \rightarrow [0, \infty)$  es una función de estado continua tal que  $t_0 \in I$  y  $x(t) \leq B + \left| \int_{t_0}^t k(s)x(s)ds \right|$ ,  $\forall t \in I$ .....(4)

Entonces  $x(t) \leq B e^{\left| \int_{t_0}^t k(s)ds \right|}$ ,  $\forall t \in I$  .....(5)

#### Prueba:

Considerando que  $t \geq t_0$

Sea  $y(t) = B + \int_{t_0}^t k(s)ds \rightarrow x(t) \leq y(t)$  (\*)

Derivando obtenemos que:  $y'(t) = k(t)x(t)$  y por lo tanto

$$y'(t) \leq k(t)y(t)$$

Separando variables e integrando se obtiene que:

$$y(t) \leq B e^{\int_{t_0}^t k(s)ds}$$

De (\*) se obtiene que:  $x(t) \leq y(t) \leq B e^{\int_{t_0}^t k(s)ds}$

El caso  $t \leq t_0$  es similar.

Estos resultados se utilizaran en la demostración de existencia y unicidad de las EDR. Según [16].

### 3.3.4. Teorema: Existencia y Unicidad de solución para las EDR

Si  $f$  es continua y satisface la condición de *Lipschitz* (3), entonces existe una única solución de (1) en  $[\sigma - \tau, \sigma + A]$  con  $A$  definida por (8), con  $\sigma \in \mathbb{R}$ ,  $\phi \in C / \|\phi\| \leq M$ . Además si  $K$  es la constante de *Lipschitz* entonces:

$$\max_{\sigma - \tau \leq \eta \leq \sigma + A} |x(\eta, \phi) - x(\eta, \psi)| \leq \|\phi - \psi\| e^{KA} \dots\dots\dots (6)$$

Donde  $\|\phi\|, \|\psi\| \leq M$

**Prueba:**

$\phi \in C$  donde  $\phi: [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$  si  $\sigma = 0$  integrando (1) resulta:

$$x(t) = \phi(0) + \int_{\sigma}^t f(s, x_s) ds, \quad \sigma \leq t \leq \sigma + A \dots\dots\dots (7)$$

Para algún  $A > 0$ .

Supongamos que  $\|\phi\| \leq M$ . Sea  $K$  la constante *Lipschitz* para  $f$  en el conjunto  $[\sigma, \sigma + \tau] \times \{\psi \in C : \|\psi\| \leq 2M\}$  y sea  $L$  la cota de  $|f|$  dada por el lema 3.3.2. Escojamos  $A = \min\left\{\tau, \frac{M}{L}\right\}$  .....(8)

Sea  $y$  una función continua en  $[\sigma - \tau, \sigma + A]$  satisfaciendo  $y_\sigma = \phi$  y  $|y(t)| \leq 2M$  en  $[\sigma, \sigma + A]$ , podemos definir una nueva función continua  $z$  en  $[\sigma - \tau, \sigma + A]$  como  $z(t) = \phi(0) + \int_\sigma^t f(s, y_s) ds$ ,  $\sigma \leq t \leq \sigma + A$  (\*)

Y  $z(t) = \phi(t - \sigma) \forall t \in [\sigma - \tau, \sigma]$ . Entonces se satisface que

$$|z(t)| \leq M + L(t - \sigma) \leq M + LA \leq 2M, \sigma \leq t \leq \sigma + A$$

Esto nos motiva a usar aproximaciones sucesivas para aproximar (7) a partir de la aproximación inicial  $x^{(0)}(t) = \phi(0)$ ,  $\sigma \leq t \leq \sigma + A$

$$Y \quad x^{(0)}(t) = \phi(t - \sigma), \quad \forall t \in [\sigma - \tau, \sigma]$$

Definamos

$$x^{(m+1)}(t) = \phi(0) + \int_\sigma^t f(s, x_s^{(m)}) ds, \quad \sigma \leq t \leq \sigma + A, m = 0, 1, 2, \dots \quad \text{.....(9)}$$

$$Y \quad x^{(m+1)}(t) = \phi(t - \sigma), \quad \forall t \in [\sigma - \tau, \sigma]$$

$$|x^{(1)}(t) - x^{(0)}(t)| = \left| \int_\sigma^t f(s, x_s^{(0)}) ds \right| \leq L(t - \sigma), \quad t \in [\sigma, \sigma + A] \quad \text{.....(10)}$$

En general

$$\begin{aligned} |x^{(m+1)}(t) - x^{(m)}(t)| &= \left| \int_\sigma^t [f(s, x_s^{(m)}) - f(s, x_s^{(m-1)})] ds \right| \\ &\leq K \int_\sigma^t \|x_s^{(m)} - x_s^{(m-1)}\| ds \\ &\leq K \int_\sigma^t \sup_{\sigma \leq \eta \leq s} |x^{(m)}(\eta) - x^{(m-1)}(\eta)| ds \end{aligned}$$



Observemos que en particular si  $m=1$

$$\begin{aligned} \left| x^{(2)}(t) - x^{(1)}(t) \right| &\leq K \int_{\sigma}^t \sup_{\sigma \leq \eta \leq s} \left| x^{(1)}(\eta) - x^{(0)}(\eta) \right| ds \\ &\leq K \int_{\sigma}^t L(s - \sigma) ds \\ &\leq KL \frac{(t - \sigma)^2}{2} \end{aligned}$$

Así también obtenemos:

$$\left| x^{(3)}(t) - x^{(2)}(t) \right| \leq K \int_{\sigma}^t KL \frac{(s - \sigma)^2}{2} ds = \frac{L}{K} \frac{[K(t - \sigma)]^3}{3!}$$

Supongamos que  $j = m$  se tenga que

$$\left| x^{(m+1)}(t) - x^{(m)}(t) \right| \leq \frac{L}{M} \frac{[K(t - \sigma)]^{m+1}}{(m+1)!} \dots\dots\dots(11)$$

Entonces para  $j = m + 1$  se tendrá:

$$\begin{aligned} \left| x^{(m+2)}(t) - x^{(m+1)}(t) \right| &\leq K \int_{\sigma}^t \sup_{\sigma \leq \eta \leq s} \left| x^{(m+1)}(\eta) - x^{(m)}(\eta) \right| ds \\ &\leq K \int_{\sigma}^t \frac{L}{M} \frac{[K(s - \sigma)]^{m+1}}{(m+1)!} ds \\ &\leq LK^{m+1} \frac{(t - \sigma)^{m+2}}{(m+2)!} = \frac{L}{K} \frac{[K(t - \sigma)]^{m+2}}{(m+2)!} \end{aligned}$$

Por el principio de inducción matemática nos permite afirmar que la desigualdad (11) es válida para todo  $m \geq 0$ .

Haciendo  $m > n$  y utilizando la desigualdad triangular tenemos que:

$$\begin{aligned} \left| x^{(m)}(t) - x^{(n)}(t) \right| &\leq \left| x^{(m)}(t) - x^{(m-1)}(t) \right| + \left| x^{(m-1)}(t) - x^{(m-2)}(t) \right| + \dots + \left| x^{(n+1)}(t) - x^{(n)}(t) \right| \\ &\leq \frac{L}{K} \frac{[K(t - \sigma)]^m}{(m)!} + \frac{L}{K} \frac{[K(t - \sigma)]^{m-1}}{(m-1)!} + \dots + \frac{L}{K} \frac{[K(t - \sigma)]^{n+1}}{(n+1)!} \\ &\leq \frac{L}{K} \sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{(KA)^j}{j!} \end{aligned}$$

Tomando supremo

$$\sup_{\sigma \leq t \leq \sigma+A} |x^{(m)}(t) - x^{(n)}(t)| \leq \frac{L}{K} \left( \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(KA)^j}{j!} - \sum_{j=1}^n \frac{(KA)^j}{j!} \right)$$

Si en el término de la derecha  $n \rightarrow +\infty$  éste tiende a cero por tanto  $\{x^{(m)}\}_{m \geq 0}$  es una sucesión uniformemente de Cauchy en  $[\sigma, \sigma + A]$ .

Entonces existe una función continua  $x: [\sigma, \sigma + A] \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que:

$$\sup_{\sigma \leq t \leq \sigma+A} |x^{(m)}(t) - x(t)| \rightarrow 0, \quad m \rightarrow +\infty$$

Extendiendo  $x$  sobre todo el intervalo  $[\sigma - \tau, \sigma + A] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , entonces se expresa que:  $x(t) = \phi(t - \sigma)$  para  $t \in [\sigma - \tau, \sigma]$

Ahora probaremos que  $x$  satisface (6).

En efecto sea

$$|f(s, x_s^{(m)}) - f(s, x_s)| \leq K \|x_s^{(m)} - x_s\| \leq K \sup_{\sigma \leq t \leq \sigma+A} |x^{(m)}(t) - x(t)|$$

Es decir la convergencia de  $f(s, x_s^{(m)}) \rightarrow f(s, x_s)$  uniformemente en  $[\sigma, \sigma + A]$  implica que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\sigma}^t f(s, x_s^{(m)}) ds = \int_{\sigma}^t f(s, x_s) ds$$

A partir de (8) obtenemos (6).

Para probar la unicidad hacemos lo siguiente en (5), para lo cual hacemos:

$$\begin{aligned} |x(t, \phi) - x(t, \psi)| &\leq |\phi(0) - \psi(0)| + \int_{\sigma}^t |f(s, x_s(\phi)) - f(s, x_s(\psi))| ds \\ &\leq \|\phi - \psi\| + K \int_{\sigma}^t \|x_s(\phi) - x_s(\psi)\| ds \end{aligned}$$

De la ecuación (6) resulta

$$\leq \|\phi - \psi\| + K \int_{\sigma}^t \max_{\sigma-\tau \leq \eta \leq s} |x(\eta, \phi) - x(\eta, \psi)| ds, \quad \forall t \in [\sigma, \sigma + A]$$

Si hacemos  $u(s) = \max_{\sigma-\tau \leq \eta \leq s} |x(\eta, \phi) - x(\eta, \psi)|$ ,  $\sigma \leq s \leq \sigma + A$

Entonces escogiendo  $\hat{t} \in [\sigma, t]$  se tiene que

$$\left| x(\hat{t}, \phi) - x(\hat{t}, \psi) \right| \leq \|\phi - \psi\| + K \int_{\sigma}^{\hat{t}} u(s) ds$$

$$\rightarrow \max_{\sigma-\tau \leq \hat{t} \leq t} \left| x(\hat{t}, \phi) - x(\hat{t}, \psi) \right| \leq \|\phi - \psi\| + K \max_{\sigma-\tau \leq \hat{t} \leq t} \int_{\sigma}^{\hat{t}} u(s) ds$$

$$\rightarrow u(t) \leq \|\phi - \psi\| + K \int_{\sigma}^t u(s) ds$$

Pues al ser  $u$  una función no negativa  $\int_{\sigma}^{\hat{t}} u(s) ds \leq \int_{\sigma}^t u(s) ds \quad \forall t: \sigma \leq \hat{t} \leq t$

Finalmente aplicando (5) y (6) se puede obtener:

$$u(t) \leq \|\phi - \psi\| e^{K(t-\sigma)} \quad \text{para } t = \sigma + A. \text{ Según [16].}$$

### Observación

Una diferencia importante entre las ecuaciones diferenciales ordinarias y las ecuaciones diferenciales con retardo, consiste en la naturaleza del valor inicial, en el caso de las EDO es un escalar o un vector pero en el caso de las EDR es de naturaleza funcional, es decir tenemos un conjunto de valores de  $x$  sobre un intervalo dado,  $x_0: [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ . Según [16]

### Observación

Es importante notar que al considerar otra condición inicial las soluciones del nuevo problema de valor inicial pueden intersectarse con las soluciones del problema anterior. Según [16]

## CAPITULO IV: MÉTODO Y MATERIALES

### 4. MODELO MATEMÁTICO PARA CONTROLAR LA PROPAGACION DEL DENGUE

#### 4.1. Modelo Matemático

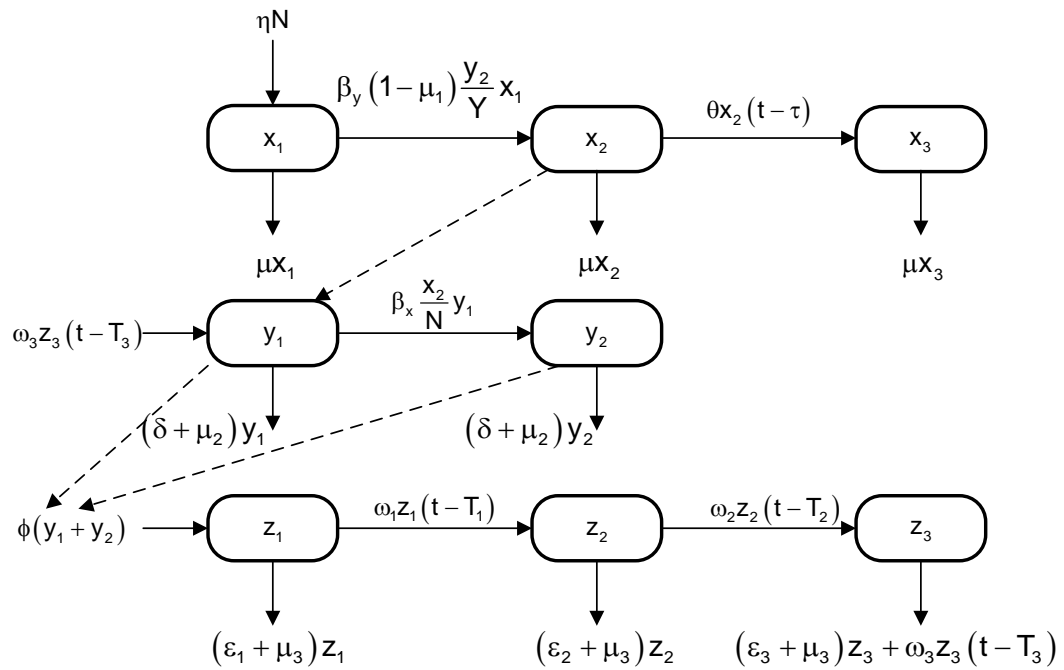
Según Luis Eduardo López Montenegro (2012), en su tesis titulada Modelos y Control Óptimo Poblacional del *Aedes Aegypti* con Retardos de Tiempo se centra en el estudio del crecimiento poblacional del mosquito transmisor del virus del dengue mediante modelos matemáticos de autoría propia con el fin de analizarlos y establecer las mejores estrategias de control que ayuden a erradicar la propagación del virus en la población humana.

En el planteamiento del modelo, asume que:

- ❖ En la población humana, una persona puede pasar por todos o algunos de los siguientes estados: susceptible (persona sana, no posee la enfermedad), infeccioso (persona que tiene la enfermedad y puede transmitir el virus a mosquitos no portadores) e inmune (persona que se ha recuperado de la enfermedad y tiene inmunidad permanente contra ese serotipo). No se tiene en cuenta la reinfección a otro serotipo.
- ❖ En la población del mosquito se distinguen dos grupos: los mosquitos maduros (portadores y no portadores del virus), y los mosquitos inmaduros (huevos, larvas y pupas).
- ❖ Una persona susceptible pasa al estado infeccioso, al ser picada por un mosquito maduro portador; mientras que un mosquito no portador (mosquito sano) pasa a ser mosquito portador al picar a una persona infecciosa.

Bajo estos supuestos, se propone el siguiente problema de control del mosquito *Aedes Aegypti* mediante la utilización de tres controles: uno por medidas preventivas a la población humana, y los otros dos, aplicados a la población del mosquito, uno a la fase aérea (mosquitos maduros) y el otro a la fase acuática (huevos, larvas y pupas), integrando la dinámica de la población humana. Dicha dinámica se interpreta mediante un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales con retardos constantes en las variables de estado para las magnitudes promedio.

La dinámica de transmisión de la enfermedad incluyendo las variables y parámetros antes mencionados, se representa en el siguiente diagrama de compartimientos:



**Figura 3:** Diagrama del compartimiento de la enfermedad, según [8].

El sistema de ecuaciones diferenciales que modela la dinámica de transmisión de la enfermedad del dengue para controlar su propagación queda representado por las siguientes ecuaciones, cada una interpreta la variación continua (razón de entrada menos razón de salida) en cada subpoblación, tanto en la población humana como en la del mosquito transmisor.

Donde:

- ✓  $P(t)$  : Tamaño de cierta población en un cierto tiempo.
- ✓  $\tau$  : Retardo de tiempo constante.
- ✓  $P(t - \tau)$  : Tamaño de dicha población en un tiempo  $\tau$  antes de ocurrir el tiempo  $t$ .
- ✓  $\frac{dP(t)}{dt}$  : Variación o el cambio de dicha población en el tiempo  $t$ .

Asimismo, la dinámica de transmisión de la enfermedad del dengue se modela mediante el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales no lineales con retardo:

$$\frac{dx_1}{dt} = \eta N - \beta_y (1 - \mu_1) \frac{y_2}{y_1 + y_2} x_1 - \mu x_1$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \beta_y (1 - \mu_1) \frac{y_2}{y_1 + y_2} x_1 - \theta x_2(t - \tau) - \mu x_2$$

$$\frac{dx_3}{dt} = \theta x_2(t - \tau) - \mu x_3$$

$$\frac{dy_1}{dt} = \omega_3 z_3 (t - T_3) - \beta_x \frac{x_2}{N} y_1 - (\delta + \mu_2) y_1$$

$$\frac{dy_2}{dt} = \beta_x \frac{x_2}{N} y_1 - (\delta + \mu_2) y_2$$

$$\frac{dz_1}{dt} = \phi(y_1 + y_2) - \omega_1 z_1 (t - T_1) - (\varepsilon_1 + \mu_3) z_1$$

$$\frac{dz_2}{dt} = \omega_1 z_1 (t - T_1) - \omega_2 z_2 (t - T_2) - (\varepsilon_2 + \mu_3) z_2$$

$$\frac{dz_3}{dt} = \omega_2 z_2 (t - T_2) - \omega_3 z_3 (t - T_3) - (\varepsilon_3 + \mu_3) z_3$$

Con condiciones iniciales:  $x_1(0) = x_{10}$ ,  $x_2(0) = x_{20}$ ,  $x_3(0) = x_{30}$ ,  $y_1(0) = y_{10}$ ,

$y_2(0) = y_{20}$ ,  $z_1(0) = z_{10}$ ,  $z_2(0) = z_{20}$ ,  $z_3(0) = z_{30}$ . Sánchez A (2009)

En la Tabla 1 se muestra la definición de las variables que se usan en el planteamiento del modelo.

Variables	Descripción
$x_1(t)$	Número promedio de personas susceptibles en un tiempo $t$
$x_2(t)$	Número promedio de personas infecciosas en un tiempo $t$
$x_3(t)$	Número promedio de personas con inmunidad a un serotipo en un tiempo $t$
$y_1(t)$	Número promedio de mosquitos maduros no portadores del virus en un tiempo $t$
$y_2(t)$	Número promedio de mosquitos maduros portadores del virus en un tiempo $t$
$z_1(t)$	Número promedio de huevos viables en un tiempo $t$
$z_2(t)$	Número promedio de larvas viables en un tiempo $t$
$z_3(t)$	Número promedio de pupas viables en un tiempo $t$
$N = x_1 + x_2 + x_3$	Tamaño total de la población humana
$Y = y_1 + y_2$	Tamaño total de mosquitos maduros

**Tabla 1:** Variables utilizados en el planteamiento del modelo, según [8]

En la Tabla 2 se muestra la definición de los parámetros que se usan en el planteamiento del modelo.

Parámetros	Descripción
$\eta$	Tasa de personas susceptibles que ingresan a la población
$\beta_y$	Probabilidad de transmisión del virus del mosquito al hombre
$\beta_x$	Probabilidad de transmisión del virus del hombre al mosquito
$\theta$	Tasa de personas infecciosas que adquieren inmunidad a un serotipo
$\mu$	Tasa de muerte natural en los humanos
$\delta$	Tasa de muerte por factores ambientales del mosquito maduro
$\phi$	Tasa de ovoposición de los mosquitos maduros
$\omega_1$	Tasa de huevos que pasan al estado larval
$\omega_2$	Tasa de larvas que pasan al estado de pupa
$\omega_3$	Tasa de pupas que pasan al estado de mosquito maduro
$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$	Tasas de mortalidad natural de huevos, larvas y pupas, respectivamente
$\tau$	Tiempo que se tardan las personas infecciosas en alcanzar la inmunidad a un serotipo
$T_1, T_2, T_3$	Tiempos de desarrollo de huevos, larvas y pupas, respectivamente
$\mu_1$	Control a la población humana (medidas preventivas)
$\mu_2$	Control a mosquitos maduros (insecticida)
$\mu_3$	Control a mosquitos inmaduros (Larvicidas ó medidas preventivas)

**Tabla 2:** Parámetros utilizados en el planteamiento del modelo, según [8]



## 4.2. Descripción de las ecuaciones diferenciales con retardo del modelo

### matemático propuesto

$$\checkmark \quad \frac{dx_1}{dt} = \eta N - \beta_y (1 - \mu_1) \frac{y_2}{y_1 + y_2} x_1 - \mu x_1$$

Ecuación que describe la variación o el cambio del número promedio de personas susceptibles a la enfermedad en el tiempo.

- $\eta N$  : Número promedio de personas que ingresan a la población susceptible.

- $\beta_y (1 - \mu_1) \frac{y_2}{y_1 + y_2} x_1$  : Número de personas susceptibles que adquieren el virus

y son capaces de transmitirlo a mosquitos maduros no portadores, y

- $\mu x_1$  : Número de personas susceptibles que mueren por causas naturales.

$$\checkmark \quad \frac{dx_2}{dt} = \beta_y (1 - \mu_1) \frac{y_2}{y_1 + y_2} x_1 - \theta x_2 (t - \tau) - \mu x_2$$

Ecuación que describe el cambio del número promedio de personas infectadas en el tiempo.

- $\theta x_2 (t - \tau)$  : Número de personas infecciosas que se recuperaron de la enfermedad en un tiempo  $\tau$

- $\mu x_2$  : Número de personas infecciosas que mueren por causas naturales (o, a causa de la enfermedad).

$$\checkmark \quad \frac{dx_3}{dt} = \theta x_2 (t - \tau) - \mu x_3$$

Ecuación que describe el cambio del número promedio de personas recuperadas en el tiempo.

- $\mu x_3$  : Número de personas recuperadas que mueren por causas naturales.

$$\checkmark \quad \frac{dy_1}{dt} = \omega_3 z_3 (t - T_3) - \beta_x \frac{x_2}{N} y_1 - (\delta + \mu_2) y_1$$

Ecuación que describe el cambio del número promedio de mosquitos maduros no portadores en el tiempo.

- $\omega_3 Z_3(t - T_3)$  : Número promedio de pupas que pasaron a ser mosquitos maduros no portadores después de un tiempo  $T_3$
- $\beta_x \frac{x_2}{N} y_1$  : Número promedio de mosquitos maduros no portadores que adquirieron el virus.
- $(\delta + \mu_2) y_1$  : Número promedio de mosquitos maduros no portadores que mueren por causas naturales o por la aplicación del control.

$$\checkmark \frac{dy_2}{dt} = \beta_x \frac{x_2}{N} y_1 - (\delta + \mu_2) y_2$$

Ecuación que describe el número promedio de mosquitos maduros portadores en el tiempo.

- $(\delta + \mu_2) y_2$  : Número promedio de mosquitos maduros portadores que mueren por causas naturales o por la aplicación del control.

$$\checkmark \frac{dz_1}{dt} = \phi(y_1 + y_2) - \omega_1 z_1(t - T_1) - (\varepsilon_1 + \mu_3) z_1$$

Ecuación que describe el número promedio de huevos viables en el tiempo.

- $\phi(y_1 + y_2)$  : Número promedio de huevos ovopositados por los mosquitos maduros.
- $\omega_1 z_1(t - T_1)$  : Huevos que pasaron al estado larval en un tiempo  $T_1$ .
- $(\varepsilon_1 + \mu_3) z_1$  : Número de huevos que no se desarrollan por causas naturales o por aplicación del control.

$$\checkmark \frac{dz_2}{dt} = \omega_1 z_1(t - T_1) - \omega_2 z_2(t - T_2) - (\varepsilon_2 + \mu_3) z_2$$

Ecuación que describe el número promedio de larvas viables en el tiempo es:

- $\omega_2 Z_2(t - T_2)$  : Número promedio de larvas que pasaron a estado de pupa después de un tiempo  $T_2$ ,

- $(\varepsilon_2 + \mu_3) Z_2$  : Número de larvas que mueren por causas naturales o por aplicación del control.

✓  $\frac{dz_3}{dt} = \omega_2 Z_2(t - T_2) - \omega_3 Z_3(t - T_3) - (\varepsilon_3 + \mu_3) Z_3$

Ecuación que describe el número promedio de pupas en el tiempo.

- $\omega_3 Z_3(t - T_3)$  : Número promedio de pupas que pasaron a ser mosquitos maduros no portadores después de un tiempo  $T_3$ .

- $(\varepsilon_3 + \mu_3) Z_3$  : Número de pupas que mueren por causas naturales o por aplicación del control

✓  $X_1 + X_2 + X_3 = N$  : Población humana total la cual es constante, si  $\eta = \mu$

✓  $\tau, T_1, T_2, T_3, \mu_1, \mu_2$  y  $\mu_3$  : Parámetros positivos

✓  $\eta, \beta_y, \beta_x, \theta, \mu, \delta, \phi, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  : Parámetros que varían entre 0 y 1.

## CAPITULO V: DISCUSIÓN Y RESULTADOS

### 5. SOLUCIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO EN ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

#### 5.1. Método de Runge Kutta para resolver numéricamente las ecuaciones diferenciales con retardo

Las EDR (Ecuaciones Diferenciales con Retardo) son ecuaciones con un “desfase temporal” en el argumento. Se puede observar que en una EDR existe una dependencia fuerte de la condición inicial sujeta a la solución inicial. Una vez realizado el análisis cualitativo del comportamiento de la solución de una EDR, así como la predicción de la existencia y unicidad de solución esto nos ayudará para cumplir nuestra objetivo que es la de hallar la solución de una manera explícita de este tipo de problemas de valor inicial asociadas a una EDR. Según [16].

#### 5.2. Aplicación del método de Runge Kutta con tamaño de paso fijo para las ecuaciones diferenciales con retardo

La no linealidad de las EDR en los modelos matemáticos correspondientes a este tipo de ecuaciones se considerará el estudio numérico un método que generalmente es estable. Según [16].

Dado el problema de valor inicial asociado a la EDR

$$(P) \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x), y(x - \tau)), & x \geq x_0 \\ y(x) = \phi(x) & , \quad x \leq x_0 \end{cases} \dots\dots\dots (1)$$

Tomamos  $h$  constante tal que  $\tau = ph$  para algún entero positivo  $p$ .

Consideremos una sucesión monótona de puntos  $\{x_0 < x_1 < \dots < x_n < \dots\}$

sobre los que se resolverá el siguiente problema de valor inicial.

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y), & \forall x \in [x_n, x_{n+1}] \\ y(x) = y_n \end{cases} \dots\dots\dots(2)$$

En cada subintervalo  $[x_n, x_{n+1}]$  usaremos los métodos de Runge-Kutta definidos a continuación.

Así en cada subintervalo de la forma  $[x_n, x_{n+1}]$  definimos la función  $g$  como:

$$g(x, y(x)) = f(x, y(x), y(x - \tau)), \quad \forall x \in [x_n, x_{n+1}]$$

Y planteamos el siguiente problema de valor inicial

$$(P) \begin{cases} y'(x) = g(x, y(x)), & \forall x \in [x_n, x_{n+1}] \\ y(x_n) = y_n \end{cases}$$

Ahora podemos aplicar para el problema (P) el método de Runge-Kutta

S – etapas:

$$k_n^1 = g(x_n, y_n)$$

$$k_n^2 = g(x_n + c_2 h, y_n + h a_{2,1} k_n^1)$$

$$k_n^3 = g(x_n + c_3 h, y_n + h(a_{3,1} k_n^1 + a_{3,2} k_n^2))$$

$\vdots$

$\dots\dots\dots(3)$

$$k_n^s = g(x_n + c_s h, y_n + h(a_{s,1} k_n^1 + \dots + a_{s,s-1} k_n^{s-1}))$$

$$y_{n+1} = y_n + h(b_1 k_n^1 + \dots + b_s k_n^s)$$

$$x_{n+1} = x_n + h$$

Donde:

$a_{2,1}, a_{3,1}, a_{3,2}, \dots, a_{s,1}, \dots, a_{s,s-1}, b_1, \dots, b_s, c_2, \dots, c_s$  ; son coeficientes reales escogidos de forma adecuada.

O en términos de  $f$  :

$$\begin{aligned}
 k_n^1 &= f(x_n, y_n, y(x_n - \tau)) \\
 k_n^2 &= f(x_n + c_2 h, y_n + h a_{2,1} k_n^1, y(x_n + c_2 h - \tau)) \\
 k_n^3 &= f(x_n + c_3 h, y_n + h(a_{3,1} k_n^1 + a_{3,2} k_n^2), y(x_n + c_3 h - \tau)) \\
 &\vdots \\
 k_n^s &= f(x_n + c_s h, y_n + h(a_{s,1} k_n^1 + \dots + a_{s,s-1} k_n^{s-1}), y(x_n + c_s h - \tau)) \\
 y_{n+1} &= y_n + h(b_1 k_n^1 + \dots + b_s k_n^s) \\
 x_{n+1} &= x_n + h
 \end{aligned} \tag{4}$$

Los valores para  $y(x_n + c_s h - \tau)$  pueden ser calculados para el caso  $n < k$  simplemente como  $y(x_{n-p} + c_s h) = \phi(x_n + c_s h - \tau)$ . Pero si  $n \geq k$  entonces debemos proceder de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 y(x_n + c_s h - \tau) &= y(x_0 + nh + c_s h - ph) \\
 &= y(x_0 + (n-p)h + c_s h) \\
 &= y(x_{n-p} + c_s h)
 \end{aligned} \tag{5}$$

Y al ser  $0 \leq c_s \leq 1$  tenemos que  $(x_{n-p} + c_s h) \in [x_{n-p}, x_{n-p+1}]$  y podemos usar los valores de  $y_{n-p}, k_{n-p}^1, y_{n-p+1}, k_{n-p+1}^1$  para aproximar  $y$  mediante un polinomio cúbico según el siguiente esquema:

$x_{n-p}$	$y_{n-p}$	$k_{n-p}^1$		
$x_{n-p}$	$y_{n-p}$	$\frac{d-k_{n-p}^1}{h}$		
		$d$	$\frac{k_{n-p+1}^1 - 2d + k_{n-p}^1}{h^2}$	
$x_{n-p+1}$	$y_{n-p+1}$	$\frac{k_{n-p+1}^1 - d}{h}$		
$x_{n-p+1}$	$y_{n-p+1}$	$k_{n-p+1}^1$		

Donde  $d = (y_{n-p+1} - y_{n-p})/h = \sum_{i=1}^s b_i k_{n-p}^i$

Empleando la fórmula de interpolación de Newton obtenemos:

$$y(x_{n-p} + \theta h) = y_{n-p} + h\theta(k_{n-p}^1 + \theta(d - k_{n-p}^1) + \theta(\theta - 1)(k_{n-p+1}^1 - 2d + k_{n-p}^1))$$

En resumen el esquema de solución sería el siguiente:

$$k_n^1 = f(x_n, y_n, \gamma_n^1)$$

$$k_n^2 = f(x_n + c_2 h, y_n + h a_{2,1} k_n^1, \gamma_n^2)$$

$$k_n^3 = f(x_n + c_3 h, y_n + h(a_{3,1} k_n^1 + a_{3,2} k_n^2), \gamma_n^3)$$

$\vdots$

.....(6)

$$k_n^s = f(x_n + c_s h, y_n + h(a_{s,1} k_n^1 + \dots + a_{s,s-1} k_n^{s-1}), \gamma_n^s)$$

$$y_{n+1} = y_n + h(b_1 k_n^1 + \dots + b_s k_n^s)$$

$$x_{n+1} = x_n + h$$

Donde

$$\gamma_n^s = \begin{cases} \phi(x_n + c_s h - \tau) & , n < p \\ y_{n-p} + h c_s \left[ k_{n-p}^1 + c_s (d - k_{n-p}^1) + c_s (c_s - 1) (k_{n-p+1}^1 - 2d + k_{n-p}^1) \right] & , n \geq p \end{cases}$$

### 5.3. Aplicación del método de Runge Kutta con tamaño de paso variable para las ecuaciones diferenciales con retardo

La suposición de que  $\tau = ph$  hace que el esquema (6) sea muy restrictivo en cuanto al tamaño de paso, así que supondremos que hemos generado una sucesión  $(h_n)_{n \geq 1}$  y así el esquema se escribe como: Según [16].

$$\begin{aligned}
 k_n^1 &= f(x_n, y_n, y(x_n - \tau)) \\
 k_n^2 &= f(x_n + c_2 h_n, y_n + h_n a_{2,1} k_n^1, y(x_n + c_2 h_n - \tau)) \\
 k_n^3 &= f(x_n + c_3 h_n, y_n + h_n (a_{3,1} k_n^1 + a_{3,2} k_n^2), y(x_n + c_3 h_n - \tau)) \\
 &\vdots \\
 &\dots\dots\dots (7) \\
 k_n^s &= f(x_n + c_s h_n, y_n + h_n (a_{s,1} k_n^1 + \dots + a_{s,s-1} k_n^{s-1}), y(x_n + c_s h_n - \tau)) \\
 y_{n+1} &= y_n + h_n (b_1 k_n^1 + \dots + b_s k_n^s) \\
 x_{n+1} &= x_n + h_n
 \end{aligned}$$

El problema es determinar el valor de  $y(x_n + c_s h_n - \tau)$ , para ello necesitamos encontrar  $p_s \in \mathbb{Z}^+$  tal que  $(x_n + c_s h_n - \tau) \in [x_{n-p_s}, x_{n-p_s+1}]$ , además supondremos que  $h_n \leq \tau$ . Así

$$y(x_n + c_s h_n - \tau) = \begin{cases} \phi(x_n + c_s h_n - \tau) & , (x_n + c_s h_n - \tau) < x_0 \\ y_{n-p_s} + h_{n-p_s} \theta_s (k_{n-p_s}^1 + \theta_s (d - k_{n-p_s}^1)) + \\ \theta_s (\theta_s - 1) (k_{n-p_s+1}^1 - 2d + k_{n-p_s}^1) & , (x_n + c_s h_n - \tau) \geq x_0 \end{cases}$$



Donde

$$\theta_s = \frac{x_n + c_s h_s - \tau - x_{n-p_s}}{h_{n-p_s}}, \quad d = \frac{y_{n-p_s+1} - y_{n-p_s}}{h_{n-p_s}} = \sum_{i=1}^s b_i k_{n-p_s}^i$$

Generalizar las ecuaciones (7) para resolver una ecuación del tipo:

$$y'(x) = f(x, y(x), y(x - \tau_1), y(x - \tau_2) \cdots y(x - \tau_m)) \quad \forall x \geq x_0$$

$$y(x) = \Phi(x) \quad \forall x \leq x_0$$

Es inmediato, simplemente asegurando que:

$$0 < h_n \leq \min_{1 \leq i \leq m} \tau_i \quad \dots\dots\dots(8)$$

Así obtenemos siguiente esquema:

$$\begin{aligned} k_n^1 &= f(x_n, y_n, y(x_n - \tau_1), \dots, y(x_n - \tau_m)) \\ k_n^2 &= f(x_n + c_2 h_n, y_n + h_n a_{2,1} k_n^1, y(x_n + c_2 h_n - \tau_1), \dots, y(x_n + c_2 h_n - \tau_m)) \\ k_n^3 &= f(x_n + c_3 h_n, y_n + h_n (a_{3,1} k_n^1 + a_{3,2} k_n^2), y(x_n + c_3 h_n - \tau_1), \dots, y(x_n + c_3 h_n - \tau_m)) \\ &\vdots \quad \dots\dots\dots(9) \end{aligned}$$

$$k_n^s = f\left(x_n + c_s h_n, y_n + h_n \sum_{j=1}^{s-1} a_{s,j} k_n^j, y(x_n + c_s h_n - \tau_1), \dots, y(x_n + c_s h_n - \tau_m)\right)$$

$$y_{n+1} = y_n + h_n \sum_{j=1}^s b_j k_n^j$$

$$x_{n+1} = x_n + h_n$$

Qué pasa si ahora consideremos una ecuación con diferentes tipos de retardo, por ejemplo:

$$y'(x) = f(x, y(x), y(x - \tau_1), y(x - \tau_2) \cdots y(x - \tau_n))$$

Donde  $f$  es una función continua y  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$  son los retardos en el argumento de la función  $y$ , es decir la derivada de  $y'$  depende de valores de la función  $y$  en puntos previos.

También cabe la posibilidad de plantear un sistema de ecuaciones diferenciales con retardo:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= f_1(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_d(x), y_1(x-\tau), y_2(x-\tau), \dots, y_d(x-\tau)) \\ y_2'(x) &= f_2(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_d(x), y_1(x-\tau), y_2(x-\tau), \dots, y_d(x-\tau)) \\ &\vdots \\ y_d'(x) &= f_d(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_d(x), y_1(x-\tau), y_2(x-\tau), \dots, y_d(x-\tau)) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(10)$$

Con las siguientes condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \phi_1(x) \quad \forall x \leq x_0 \\ y_2(x) &= \phi_2(x) \quad \forall x \leq x_0 \\ &\vdots \\ y_d(x) &= \phi_d(x) \quad \forall x \leq x_0 \end{aligned}$$

Redefiniendo el sistema de EDR  $Y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$  como  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_d)$

así como también

$$F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$$

$F = (f_1, f_2, \dots, f_d)$  y  $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$  como  $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_d)$  obtenemos el

sistema:

$$Y'(x) = F(x, Y(x), Y(x-\tau)) \quad \forall x \geq x_0$$

$$Y(x) = \Phi(x) \quad \forall x \leq x_0$$

Que puede ser extendido para considerar que  $F$  depende también de diferentes “retardos”  $(\tau_1, \dots, \tau_m)$ .

Para resolver numéricamente este sistema EDR (10) podemos extender el método de Runge Kutta de nivel especificada para cada componente con el esquema (9) obteniéndose la solución aproximada del sistema.

#### 5.4. Consistencia de los métodos de Runge Kutta para las ecuaciones diferenciales con retardo

En un Problema de Valor Inicial, se busca una solución en un intervalo  $[t_0, t_f]$  con  $t_0 < t_f$ . Las ecuaciones diferenciales con retardo muestran que  $y'(t)$  depende de valores anteriores a  $t$ . En particular,  $y'(t_0)$  depende de  $y(t_0 - \tau_1), \dots, y(t_0 - \tau_n)$ . Por esto, una solución en  $[t_0, t_f]$  depende de los valores para  $t \leq t_0$ , es decir, depende de la historia  $S(t)$ ,  $t \leq t_0$ .

Entonces para la consistencia del método de Runge Kutta aplicado a las EDR se realiza una extensión de los resultados anteriores dados para PVI con EDO tanto para el método de paso fijo y paso variable bajo la siguiente condición:

Si  $\{c_i\}, \{a_{ij}\}$  y  $\{b_j\}$  son los coeficientes asociados a un método Runge Kutta de orden  $p$  entonces el esquema de paso variable (7) es consistencia de orden  $p$ , es decir para todo  $n = 0, 1, \dots$  se satisface que:

$$\|y(x_{n+1}) - y_{n+1}\| \leq K h_n^{p+1}$$

## 5.5. Implementación numérica

Para la construcción de las subrutinas de los algoritmos de resolución de los problemas de valor inicial con EDR se han utilizado las siguientes funciones en MATLAB. Según [16].

### 5.5.1. Función edr43

La función edr43 resuelve PVI para EDR con retardos constantes. Es decir, resuelve el sistema no lineal de primer orden.

$$y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau_1), \dots, y(t - \tau_n)).$$

En el intervalo  $[t_0, t_f]$ , con  $t_0 < t_f$  y la función historia  $y(t) = S(t)$ ,  $t \leq t_0$ . La función edr43 produce una solución continua en el intervalo  $[t_0, t_f]$ . Está basado en el método de Runge-Kutta. Según [16].

### 5.5.2. Función edr433

La función edr433 resuelve PVI para EDR con retardos generales. Es decir, resuelve el sistema no lineal de primer orden.

$$y'(t) = f(t, y(t), y(d(1)), \dots, y(d(n)))$$

En el intervalo  $[t_0, t_f]$ , con  $t_0 < t_f$ , donde los retardos dependen de  $t$  y de  $y(t)$ . Está basado en el método de Runge Kutta. Según [16]

## 5.6. Simulación del modelo

Presentar un escenario de simulación del modelo matemático propuesto. Las condiciones iniciales y los valores de los parámetros se tomaron de forma hipotética, según [8], con el objetivo de tener una perspectiva de cómo es el comportamiento de la enfermedad al aplicar o no los controles; mientras que para un trabajo a futuro se tomarían la estimación de los parámetros en base a datos obtenidos por el Instituto Nacional de Estadística e Informática (INEI), la Organización Mundial de la Salud (OMS), la DIRESA Piura/OEPI o el MINSA.

Los valores de los parámetros que se utilizaron para la simulación se presentan en la Tabla 3.

Parámetro	I
$\eta$	0,004
$\beta_y$	0,1
$\beta_x$	0,1
$\theta$	0,02
$\mu$	0,0035
$\delta$	0,05
$\phi$	0,5
$\omega_1$	0,05
$\omega_2$	0,05
$\omega_3$	0,05
$\varepsilon_1$	0,123
$\varepsilon_2$	0,123
$\varepsilon_3$	0,123
$\tau$	7
$T_1$	3
$T_2$	7
$T_3$	3

**Tabla 3:** Valores de los parámetros, según [8]

## 5.7. Discusión de los resultados

Se obtuvieron los siguientes resultados simulando el modelo propuesto con el software Matlab.

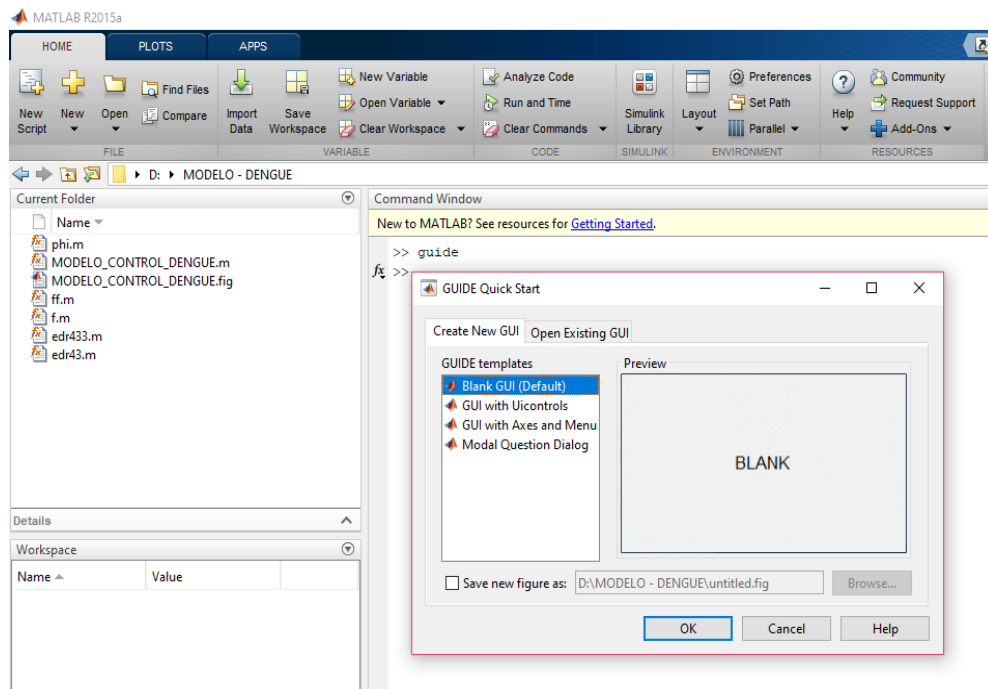


Figura. 4: Inicio de la simulación del modelo matemático

### 5.7.1. Comportamiento de la Población Humana

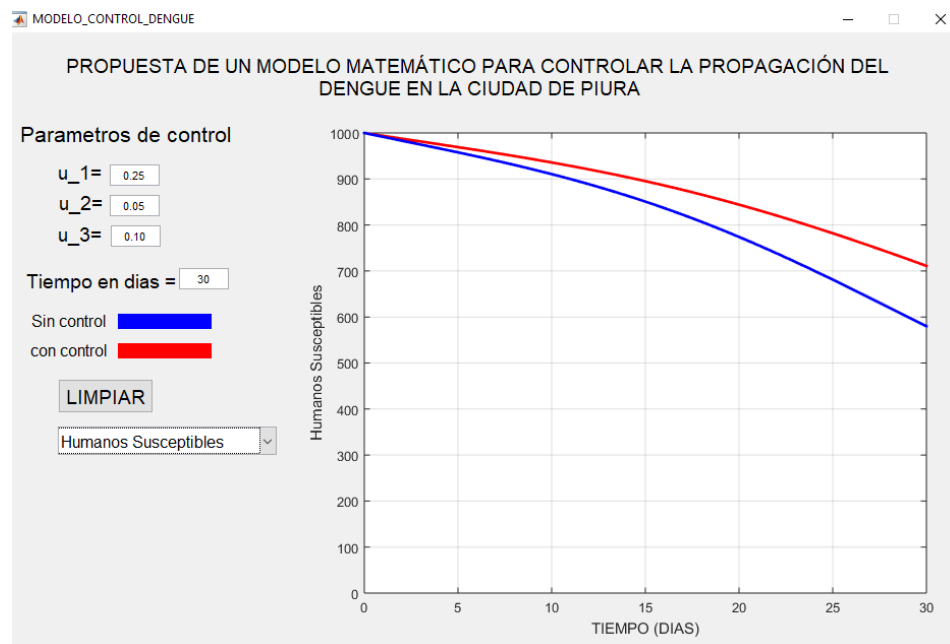
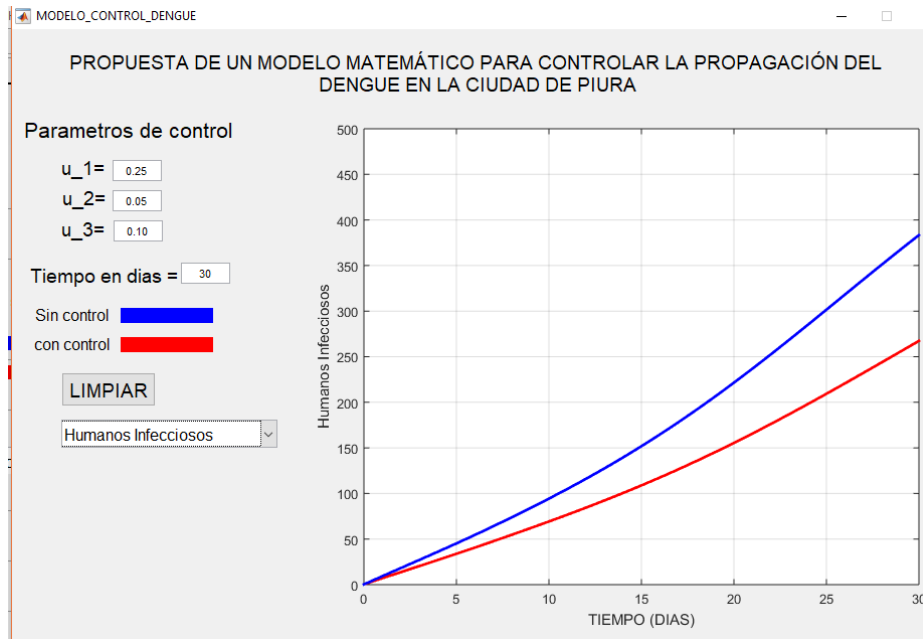
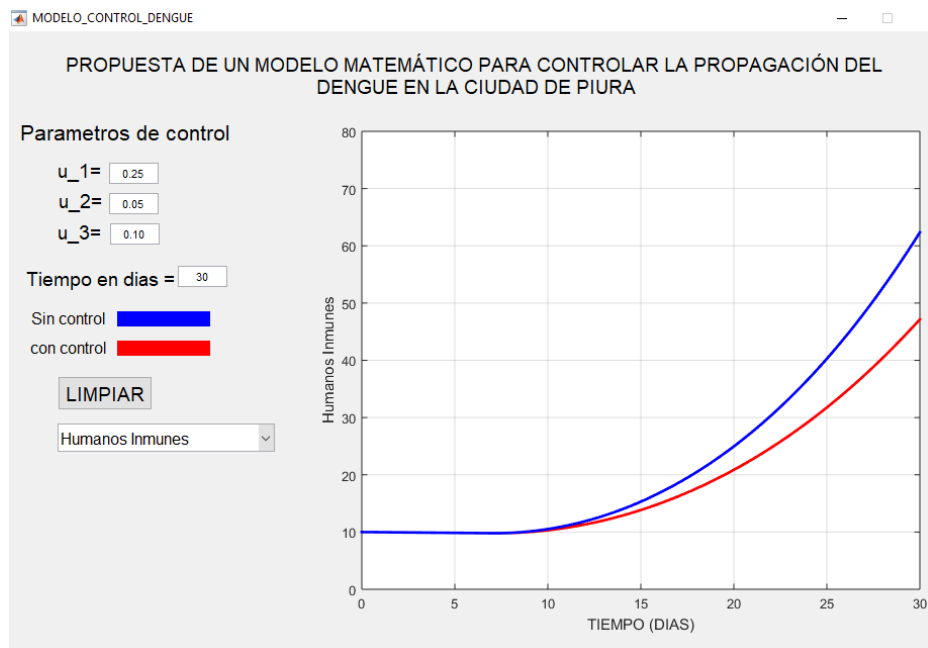


Figura 5: Comportamiento de Humanos Susceptibles

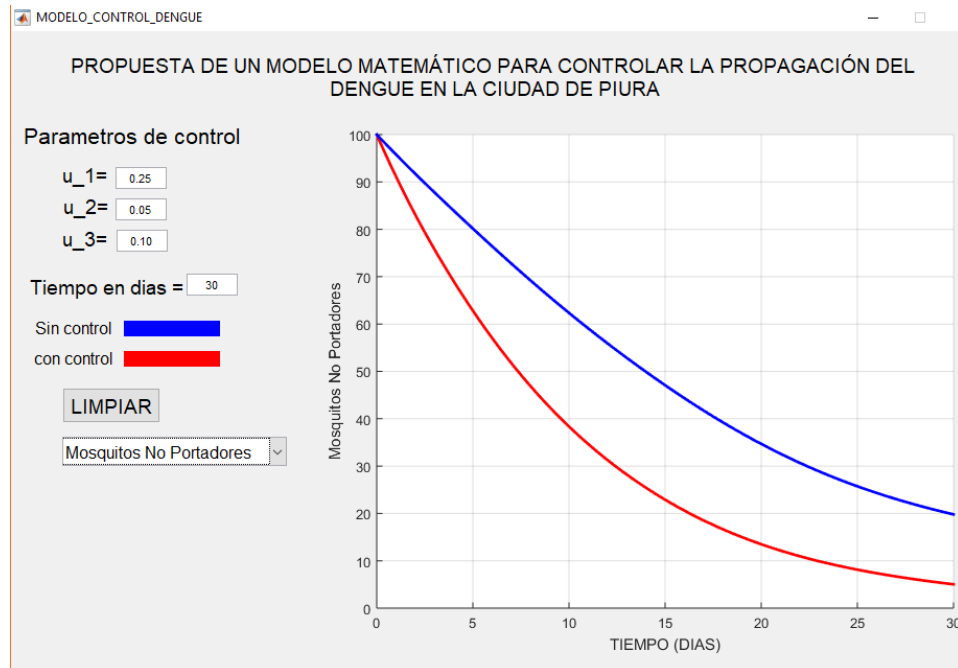


**Figura 6:** Comportamiento de Humanos Infecciosos

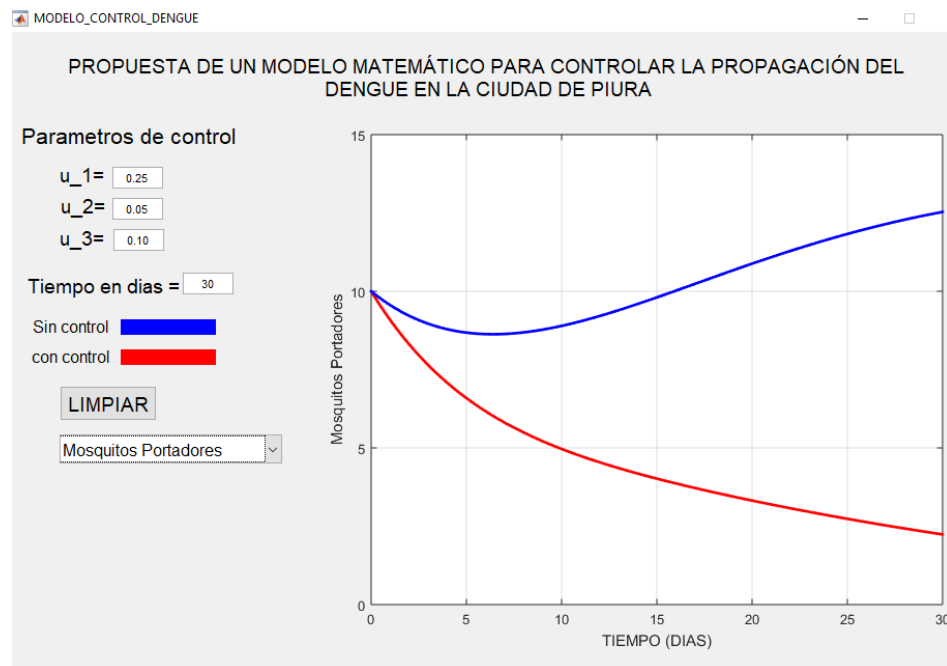


**Figura 7:** Comportamiento de Humanos Inmunes

### 5.7.2. Comportamiento del Mosquito

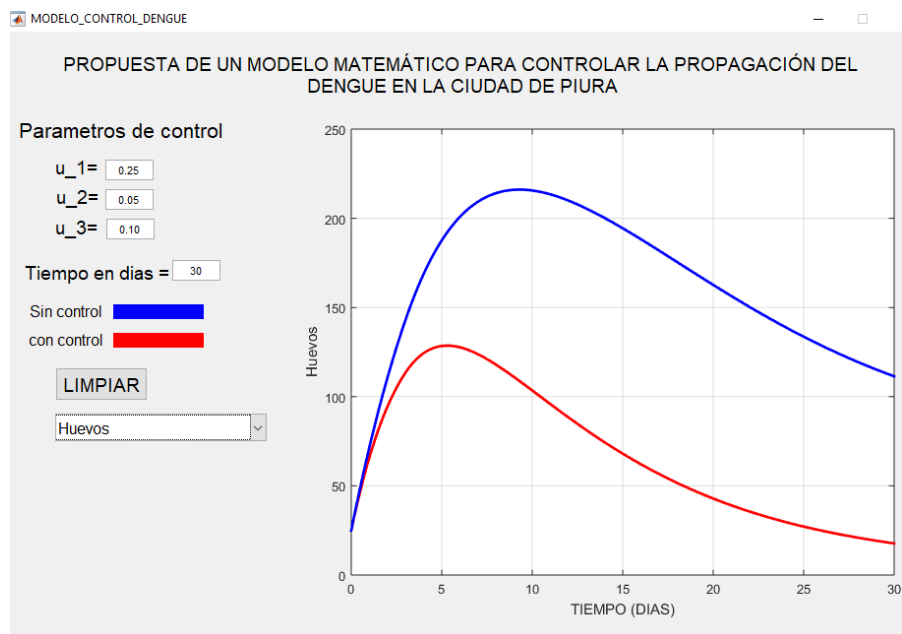


**Figura 8:** Comportamiento de Mosquitos No Portadores

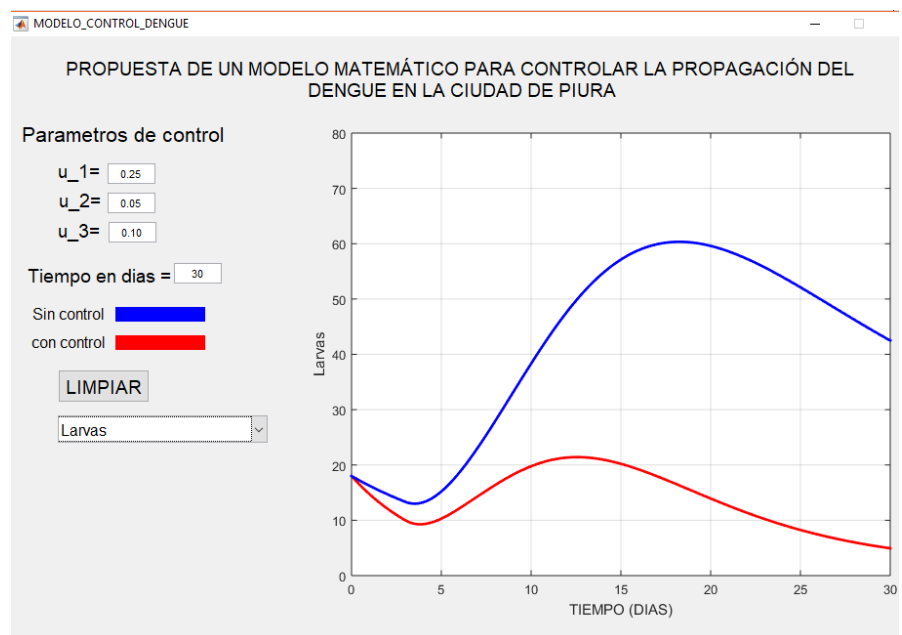


**Figura 9:** Comportamiento de Mosquitos Portadores

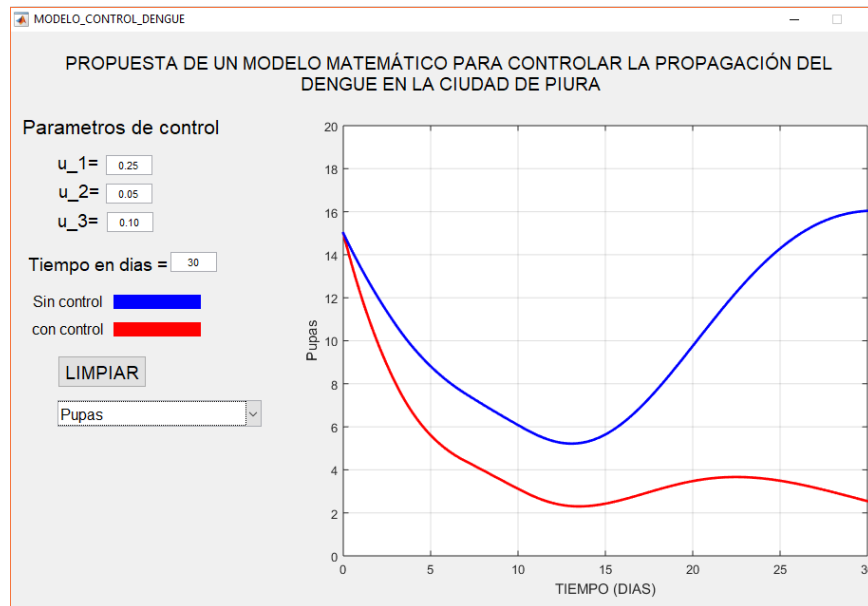




**Figura 10:** Comportamiento de los Huevos



**Figura 11:** Comportamiento de las Larvas



**Figura 12:** Comportamiento de las Pupas

Las Figuras muestran los resultados al tomar datos reales proporcionados por el DANE, OMS y la revisión de bibliografía para los parámetros relacionados con el mosquito. Cuando se aplican los controles se logra disminuir la población del mosquito haciendo que reduzca levemente el tamaño de la población humana infectada. Esto hace, que al transcurrir el tiempo, se elimine la enfermedad del medio, manteniendo una efectividad en los controles del 25 %, 5 % y 10%, respectivamente. Es decir, para controlar la enfermedad del dengue, se deben aplicar los tres controles pero con una exhaustiva monitorización y vigilancia en la población natural de los mosquitos, con mayor peso en la utilización del control mecánico o control preventivo, teniendo presente no eliminar por completo al mosquito, ya que esto puede ocasionar tragedias mucho más graves a nivel ecológico.

## CONCLUSIONES

La propuesta del modelo matemático para controlar el dengue en la ciudad de Piura es capaz de simular la dinámica de transmisión del dengue, muestra el comportamiento de las poblaciones del *Aedes Aegypti* y de las personas afectadas ante la presencia de este virus y puede ser una herramienta precisa y sostenible a tener en cuenta para apoyar de forma científica la toma de decisiones en los programas de vigilancia y control.

Que la mejor manera de controlar este virus, es evitar la propagación y reproducción del *Aedes Aegypti*

El trabajo se ha realizado utilizando el método explícito de Runge-Kutta por lo cual queda probada la consistencia más no su convergencia. Porque que todo método de Runge Kutta explícito de orden 4 para problemas no lineales no cumple con la estabilidad. Lo cual es un problema abierto para trabajos futuros.

Las EDR se presentan en variadas aplicaciones y tienen una amplia gama de posibilidades para su uso, pues se puede demostrar de manera realista al considerar intervalos de tiempo necesarios para que exista una interacción apropiada entre los diversos componentes del sistema objeto de estudio.

## RECOMENDACIONES

- ✓ Implementar a futuro la propuesta del modelo matemático en la provincia de Piura.
- ✓ Se trabajó con la versión de prueba de MATLAB y sugerimos que la Universidad Nacional de Piura por intermedio del CIT comprar la licencia del software citado, para trabajos posteriores.
- ✓ Investigar la estabilidad del sistema de ecuaciones diferenciales, teniendo en cuenta que la determinación de los valores propios asociados a la linealización del sistema implica la solución a una ecuación transcendental, es decir una ecuación cuasi-polinómica.
- ✓ Estudiar la estabilidad del sistema, porque este modelo nos ayudaría a preveer la evolución de la enfermedad en la población humana, teniendo en cuenta la población del mosquito transmisor.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

### Referencias

#### Bibliografía

- [1] Adams B, K. D. (2009). *Man bites mosquito: understanding the contribution of human movement to vector-borne disease dynamics. Departament of Biology.* . Japan; 2009.: Kyushu University. Fukuoka.
- [2] Adams B, K. D. (2009). *understanding the contribution of human movement to vector-borne disease dynamics.* Japan: Fukuoka. .
- [3] Derouich M, B. A. (2006). *Mathematical modeling and computer simulation.* USA: Text in Applied Mathematics and computation.
- [4] Garba S, G. A. (1 de Junio de 2011). *Backward bifurcations in dengue transmission dynamics. Mathematical Biosciences.* Obtenido de [www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0025556408000734](http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0025556408000734)
- [5] Leonardo D. Restrepo-Alape, Hernán D. Toro-Zapata y Aníbal Muñoz-Loaiza. (23 de DICIEMBRE de 2010). *Modelo matemático para el control químico con resistencia del Aedes aegypti (Diptera: Culicidae).* Obtenido de Revista de Salud Pública: <http://dx.doi.org/10.1590/S0124-00642010000600015>
- [6] Ministerio de Salud. (25 de Enero de 2005). *MATERIALES EDUCATIVOS PARA PREVENIR EL DENGUE.* Obtenido de <http://www.minsa.gob.pe/portada/campyesp/dengue/archivos/Educaci%C3%B3n%20Secundaria%20DENGUE.pdf>

- [7] MINISTERIO DE SALUD. (05 de ABRIL de 2014). *BOLETÍN EPIDEMIOLOGICO(LIMA)*. Obtenido de BOLETÍN 14:  
<http://www.dge.gob.pe/boletin.php>
  
- [8] López, M. L. E. (2012). *Modelos y Control Óptimo Poblacional del Aedes aegypti*. Colombia: Manizales.
  
- [9] Mora, L. S. (2 000). *Un modelo matemático de la epidemia del Dengue*. Venezuela: Merida.
  
- [10] Organización Panamericana de la Salud. (09 de Febrero de 2011). *Dengue*. Obtenido de Boletín N° 37-2011 de Vigilancia Epidemia por dengue en Colombia. Bogotá:  
[http://www.paho.org/col/index.php?option=com\\_content&view=category&layout=blog&id=751&Itemid=468](http://www.paho.org/col/index.php?option=com_content&view=category&layout=blog&id=751&Itemid=468)
  
- [12] Organización Panamericana de la Salud(OPS). (26 de Setiembre de 2011). *Dengue*. Obtenido de Boletín N° 37-2011 de Vigilancia Epidemia por Dengue en Colombia. Bogotá:  
[http://new.paho.org/col/index.php?option=com\\_content&task=blogcategory&id=751&Itemid=468](http://new.paho.org/col/index.php?option=com_content&task=blogcategory&id=751&Itemid=468)
  
- [13] Sánchez A, A. H. (2009). *A theoretical model for the dengue epidemic Using Delayed Differential Equations*. Ciudad de La Habana - Cuba: IWWAN.
  
- [14] Santiago Velez, C. N. (2006). *Hacia la construcción de un modelo de simulación de la transmisión del Dengue en Colombia*. Colombia: Medellin.
  
- [15] Zapata, H. D. (2010). *Modelo de la transmisión del dengue clásico durante un brote epidémico*. Colombia: Armenia - Quindio.

- [16] Lobón D, R. (2008). *Resolución numérica de las ecuaciones Diferenciales con retardo mediante runge-kutta Explícito y su aplicación en biomatemática*. Lima-Peru.
- [17] [https://www.paho.org/hq/index.php?option=com\\_content&view=article&id=4493:2010-informacion-general-dengue&Itemid=40232&lang=es](https://www.paho.org/hq/index.php?option=com_content&view=article&id=4493:2010-informacion-general-dengue&Itemid=40232&lang=es)
- [18] López, M. L. E. (2007). *Análisis Lineal de estabilidad de un modelo matemático para la transmisión de la enfermedad del dengue y el comportamiento numérico del modelo con datos tomados de la población de Tumaco(Nariño)*. Colombia: Nariño.

## **ANEXOS**



## Función edr43.m

```
function [x,y]=edr43(x0,y0,f,phi,dx,xmax,tau)
nmax=floor(xmax/dx);
% definicion de vectores
d = size(y0,2);
m = size(tau,2);
y = zeros(nmax+1,d);
x = zeros(nmax+1,1);
g = zeros(m,d);
h = dx*ones(size(x));
f1 = zeros(nmax+1,d);
% coeficientes R-K
s = 4;
k = zeros(s,d);
c = [0 1/2 1/2 1];
b = [1/6 2/6 2/6 1/6];
a21= 1/2;
a31= 0;
a32= 1/2;
a41= 0;
a42= 0;
a43= 1;
dn=zeros(s,d);
p = zeros(s,m);
% valores iniciales
x(1) = x0;
y(1,:) = y0;
n=1;
while (n<=nmax)
for i=1:s
for j=1:m
if (x(n)+c(i)*h(n)-tau(j)<x(1))
g(j,:)=phi(x(n)+c(i)*h(n)-tau(j));
p(:,j) = (n-1)*ones(size(p(:,j)));
else
p(:,j) = max(p(:,j))*ones(size(p(:,j)));
while ( x(n-p(i,j)+1) < x(n)+c(i)*h(n)-tau(j))
p(i,j)=p(i,j)-1;
end
```

```

dn(i,:) = (y(n-p(i,j)+1,:)-y(n-p(i,j),:))/h(n-p(i,j));
theta(i) = (x(n)+c(i)*h(n)-tau(j)-x(n-p(i,j)))/h(n-p(i,j));
g(j,:) = y(n-p(i,j),:)+theta(i)*h(n-p(i,j))*(f1(n-p(i,j),:)+...
theta(i)*(dn(i,:)-f1(n-p(i,j),:))+theta(i)*(theta(i)-1)*...
(f1(n-p(i,j)+1,:)-2*dn(i,:)+f1(n-p(i,j),:)));
end
end
switch i
case 1
k(1,:) = f(x(n),y(n,:),g);
f1(n,:) = k(1,:);
case 2
k(2,:) = f(x(n)+c(2)*h(n),y(n,:)+h(n)*a21*k(1,:),g);
case 3
k(3,:) = f(x(n)+c(3)*h(n),y(n,:)+h(n)*(a31*k(1,:)+...
a32*k(2,:)),g);
case 4
k(4,:) = f(x(n)+c(4)*h(n),y(n,:)+h(n)*(a41*k(1,:)+...
a42*k(2,:)+a43*k(3,:)),g);
end
end
y(n+1,:)=y(n,:)+h(n)*b*k;
x(n+1)=x(n)+h(n);
n=n+1;
end
return

```

## Función edr433.m

```
function [x,y]=edr433(x0,y0,ff,phi,dx,xmax,tau)
nmax=floor(xmax/dx);
% definicion de vectores
d = size(y0,2);
m = size(tau,2);
y = zeros(nmax+1,d);
x = zeros(nmax+1,1);
g = zeros(m,d);
h = dx*ones(size(x));
f1 = zeros(nmax+1,d);
% coeficientes R-K
s = 4;
k = zeros(s,d);
c = [0 1/2 1/2 1];
b = [1/6 2/6 2/6 1/6];
a21= 1/2;
a31= 0;
a32= 1/2;
a41= 0;
a42= 0;
a43= 1;
dn=zeros(s,d);
p = zeros(s,m);
% valores iniciales
x(1) = x0;
y(1,:) = y0;
n=1;
while (n<=nmax)
for i=1:s
for j=1:m
if (x(n)+c(i)*h(n)-tau(j)<x(1))
g(j,:)=phi(x(n)+c(i)*h(n)-tau(j));
p(:,j) = (n-1)*ones(size(p(:,j)));
else
p(:,j) = max(p(:,j))*ones(size(p(:,j)));
while ( x(n-p(i,j)+1) < x(n)+c(i)*h(n)-tau(j))
p(i,j)=p(i,j)-1;
end
```

```

dn(i,:) = (y(n-p(i,j)+1,:)-y(n-p(i,j),:))/h(n-p(i,j));
theta(i) = (x(n)+c(i)*h(n)-tau(j)-x(n-p(i,j)))/h(n-p(i,j));
g(j,:) = y(n-p(i,j),:)+theta(i)*h(n-p(i,j))*(f1(n-p(i,j),:)+...
theta(i)*(dn(i,)-f1(n-p(i,j),:))+theta(i)*(theta(i)-1)*...
(f1(n-p(i,j)+1,:)-2*dn(i,)+f1(n-p(i,j),:)));
end
end
switch i
case 1
k(1,:) = ff(x(n),y(n,:),g);
f1(n,:) = k(1,:);
case 2
k(2,:) = ff(x(n)+c(2)*h(n),y(n,:)+h(n)*a21*k(1,:),g);
case 3
k(3,:) = ff(x(n)+c(3)*h(n),y(n,:)+h(n)*(a31*k(1,)+...
a32*k(2,)),g);
case 4
k(4,:) = ff(x(n)+c(4)*h(n),y(n,:)+h(n)*(a41*k(1,)+...
a42*k(2,)+a43*k(3,)),g);
end
end
y(n+1,:)=y(n,:)+h(n)*b*k;
x(n+1)=x(n)+h(n);
n=n+1;
end
return

```

### **Función f.m**

```
function z=f(x,y,yt)
global n B1 B2 thet u delt fi w1 w2 w3 e1 e2 e3 u1 u2 u3
z=zeros(size(y));
z(1)=n*(y(1)+y(2)+y(3))-(1-u1)*B2*y(5)*y(1)/(y(4)+y(5))-u*y(1);
z(2)=(1-u1)*B2*y(5)*y(1)/(y(4)+y(5))-thet*yt(1,2)-u*y(2);
z(3)=thet*yt(1,2)-u*y(3);
z(4)=w3*yt(4,8)-B1*y(2)*y(4)/(y(1)+y(2)+y(3))-(delt+u2)*y(4);
z(5)=B1*y(2)*y(4)/(y(1)+y(2)+y(3))-(delt+u2)*y(5);
z(6)=fi*(y(4)+y(5))-w1*yt(2,6)-(e1+u3)*y(6);
z(7)=w1*yt(2,6)-w2*yt(3,7)-(e2+u3)*y(7);
z(8)=w2*yt(3,7)-w3*yt(4,8)-(e3+u3)*y(8);
return
```

### **Función ff.m**

```
function z=ff(x,y,yt)
global n B1 B2 thet u delt fi w1 w2 w3 e1 e2 e3 u11 u22 u33
z=zeros(size(y));
z(1)=n*(y(1)+y(2)+y(3))-(1-u11)*B2*y(5)*y(1)/(y(4)+y(5))-u*y(1);
z(2)=(1-u11)*B2*y(5)*y(1)/(y(4)+y(5))-thet*yt(1,2)-u*y(2);
z(3)=thet*yt(1,2)-u*y(3);
z(4)=w3*yt(4,8)-B1*y(2)*y(4)/(y(1)+y(2)+y(3))-(delt+u22)*y(4);
z(5)=B1*y(2)*y(4)/(y(1)+y(2)+y(3))-(delt+u22)*y(5);
z(6)=fi*(y(4)+y(5))-w1*yt(2,6)-(e1+u33)*y(6);
z(7)=w1*yt(2,6)-w2*yt(3,7)-(e2+u33)*y(7);
z(8)=w2*yt(3,7)-w3*yt(4,8)-(e3+u33)*y(8);
return
```

### **Función phi.m**

```
function z=phi(x)
z=zeros(1,8);
z(1)=1000;
z(2)=0.3;
z(3)=10;
z(4)=100;
z(5)=10;
z(6)=25;
z(7)=18;
z(8)=15;
```

## Función MODELO\_CONTROL\_DENGUE.m

```
function varargout = MODELO_CONTROL_DENGUE(varargin)
% MODELO_DE_TRANSMISION_Y_CONTROL_DEL_DENGUE M-file for
MODELO_DE_TRANSMISION_Y_CONTROL_DEL_DENGUE.fig
%     MODELO_DE_TRANSMISION_Y_CONTROL_DEL_DENGUE, by itself, creates
a new MODELO_DE_TRANSMISION_Y_CONTROL_DEL_DENGUE or raises the
existing
%     singleton*.
%
%     H = MODELO_DE_TRANSMISION_Y_CONTROL_DEL_DENGUE returns the
handle to a new MODELO_DE_TRANSMISION_Y_CONTROL_DEL_DENGUE or the
handle to
%     the existing singleton*.
%
%
MODELO_DE_TRANSMISION_Y_CONTROL_DEL_DENGUE('CALLBACK', hObject,eventDat
a,handles,...) calls the local
%     function named CALLBACK in
MODELO_DE_TRANSMISION_Y_CONTROL_DEL_DENGUE.M with the given input
arguments.
%
%
MODELO_DE_TRANSMISION_Y_CONTROL_DEL_DENGUE('Property','Value',...)
creates a new MODELO_DE_TRANSMISION_Y_CONTROL_DEL_DENGUE or raises the
%     existing singleton*. Starting from the left, property value
pairs are
%     applied to the GUI before
MODELO_DE_TRANSMISION_Y_CONTROL_DEL_DENGUE_OpeningFcn gets called. An
%     unrecognized property name or invalid value makes property
application
%     stop. All inputs are passed to
MODELO_DE_TRANSMISION_Y_CONTROL_DEL_DENGUE_OpeningFcn via varargin.
%
%     *See GUI Options on GUIDE's Tools menu. Choose "GUI allows
only one
%     instance to run (singleton)".
%
% See also: GUIDE, GUIDATA, GUIHANDLES
```

```

% Edit the above text to modify the response to help
MODELO_DE_TRANSMISION_Y_CONTROL_DEL_DENGUE

% Last Modified by GUIDE v2.5 13-Mar-2016 01:05:13

% Begin initialization code - DO NOT EDIT
gui_Singleton = 1;
gui_State = struct('gui_Name',       mfilename, ...
                  'gui_Singleton',   gui_Singleton, ...
                  'gui_OpeningFcn', @MODELO_CONTROL_DENGUE_OpeningFcn, ...
                  'gui_OutputFcn',  @MODELO_CONTROL_DENGUE_OutputFcn,
                  ...
                  'gui_LayoutFcn',  [] , ...
                  'gui_Callback',   []);
if nargin && ischar(varargin{1})
    gui_State.gui_Callback = str2func(varargin{1});
end

if nargout
    [varargout{1:nargout}] = gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
else
    gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
end
% End initialization code - DO NOT EDIT


% --- Executes just before MODELO_DE_TRANSMISION_Y_CONTROL_DEL_DENGUE
% is made visible.
function MODELO_CONTROL_DENGUE_OpeningFcn(hObject, eventdata, handles,
varargin)
% This function has no output args, see OutputFcn.
% hObject    handle to figure
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles     structure with handles and user data (see GUIDATA)
% varargin    command line arguments to
MODELO_DE_TRANSMISION_Y_CONTROL_DEL_DENGUE (see VARARGIN)

```

```

% Choose default command line output for
MODELO_DE_TRANSMISION_Y_CONTROL_DEL_DENGUE
handles.output = hObject;

% Update handles structure
guidata(hObject, handles);

% UIWAIT makes MODELO_DE_TRANSMISION_Y_CONTROL_DEL_DENGUE wait for
user response (see UIRESUME)
% uiwait(handles.figure1);

% --- Outputs from this function are returned to the command line.
function varargout = MODELO_CONTROL_DENGUE_OutputFcn(hObject,
eventdata, handles)
% varargout    cell array for returning output args (see VARARGOUT);
% hObject      handle to figure
% eventdata    reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles      structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Get default command line output from handles structure
varargout{1} = handles.output;

% --- Executes on selection change in popupmenu1.
function popupmenu1_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject      handle to popupmenu1 (see GCBO)
% eventdata    reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles      structure with handles and user data (see GUIDATA)
global n B1 B2 thet u delt fi w1 w2 w3 e1 e2 e3 u1 u2 u3 u11 u22 u33
u1=str2num(get(handles.edit1,'string')); % este u1
u2=str2num(get(handles.edit2,'string'));
u3=str2num(get(handles.edit3,'string'));
tt=str2num(get(handles.edit4,'string'));
n=0.004;B1=0.1;B2=0.1;thet=0.02;u=0.0035;delt=0.05;fi=0.5;w1=0.05;w2=0
.05;
w3=0.05;e1=0.123;e2=0.123;e3=0.123;u11=0;u22=0;u33=0;
m=4;

```



```

tau=1*ones(1,m);
tau(1)=7;
tau(2)=3;
tau(3)=7;
tau(4)=3;
dx=0.1;
t=get(handles.popupmenu1,'value');
switch t
    case 1
        xmax=tt;
        x0=0;
        y0=phi(x0);
        [xx,yy]=edr43(x0,y0,@ff,@phi,dx,xmax,tau);
        [x,y]=edr43(x0,y0,@f,@phi,dx,xmax,tau);
        axes(handles.axes1)
        plot(x,y(:,1),'r','linewidth',2);
        hold on
        plot(xx,yy(:,1),'b','linewidth',2);
        grid on
        xlabel('TIEMPO (DIAS)'); ylabel('Humanos Susceptibles');
        axis([0,xmax,0,1000]);
    case 2
        xmax=tt;
        x0=0;
        y0=phi(x0);
        [xx,yy]=edr43(x0,y0,@ff,@phi,dx,xmax,tau);
        [x,y]=edr43(x0,y0,@f,@phi,dx,xmax,tau);
        axes(handles.axes1)
        plot(x,y(:,2),'r','linewidth',2);
        hold on
        plot(xx,yy(:,2),'b','linewidth',2);
        grid on
        xlabel('TIEMPO (DIAS)'); ylabel('Humanos Infecciosos');
        axis([0,xmax,0,500]);
    case 3
        xmax=tt;
        x0=0;
        y0=phi(x0);
        [xx,yy]=edr43(x0,y0,@ff,@phi,dx,xmax,tau);

```

```

[x,y]=edr43(x0,y0,@f,@phi,dx,xmax,tau);
axes(handles.axes1)
plot(x,y(:,3),'r','linewidth',2);
hold on
plot(xx,yy(:,3),'b','linewidth',2);
grid on
xlabel('TIEMPO (DIAS)'); ylabel('Humanos Inmunes');
axis([0,xmax,0,500]);

case 4
xmax=tt;
x0=0;
y0=phi(x0);
[xx,yy]=edr43(x0,y0,@ff,@phi,dx,xmax,tau);
[x,y]=edr43(x0,y0,@f,@phi,dx,xmax,tau);
hold on
axes(handles.axes1)
plot(x,y(:,4),'r','linewidth',2);
hold on
plot(xx,yy(:,4),'b','linewidth',2);
grid on
xlabel('TIEMPO (DIAS)'); ylabel('Mosquitos No Portadores');
axis([0,xmax,0,100]);

case 5
xmax=tt;
x0=0;
y0=phi(x0);
[xx,yy]=edr43(x0,y0,@ff,@phi,dx,xmax,tau);
[x,y]=edr43(x0,y0,@f,@phi,dx,xmax,tau);
axes(handles.axes1)
plot(x,y(:,5),'r','linewidth',2);
hold on
plot(xx,yy(:,5),'b','linewidth',2);
grid on
xlabel('TIEMPO (DIAS)'); ylabel('Mosquitos Portadores');
axis([0,xmax,0,15]);

case 6
xmax=tt;
x0=0;
y0=phi(x0);

```

```

[xx,yy]=edr43(x0,y0,@ff,@phi,dx,xmax,tau);
[x,y]=edr43(x0,y0,@f,@phi,dx,xmax,tau);
axes(handles.axes1)
plot(x,y(:,6),'r','linewidth',2);
hold on
plot(xx,yy(:,6),'b','linewidth',2);
grid on
xlabel('TIEMPO (DIAS)'); ylabel('Huevos');
axis([0,xmax,0,250]);

case 7
    xmax=tt;
    x0=0;
    y0=phi(x0);
    [xx,yy]=edr43(x0,y0,@ff,@phi,dx,xmax,tau);
    [x,y]=edr43(x0,y0,@f,@phi,dx,xmax,tau);
    axes(handles.axes1)
    plot(x,y(:,7),'r','linewidth',2);
    hold on
    plot(xx,yy(:,7),'b','linewidth',2);
    grid on
    xlabel('TIEMPO (DIAS)'); ylabel('Larvas');
    axis([0,xmax,0,80]);

case 8
    xmax=tt;
    x0=0;
    y0=phi(x0);
    [xx,yy]=edr43(x0,y0,@ff,@phi,dx,xmax,tau);
    [x,y]=edr43(x0,y0,@f,@phi,dx,xmax,tau);
    axes(handles.axes1)
    plot(x,y(:,8),'r','linewidth',2);
    hold on
    plot(xx,yy(:,8),'b','linewidth',2);
    grid on
    xlabel('TIEMPO (DIAS)'); ylabel('Pupas');
    axis([0,xmax,0,20]);

end

function popupmenu1_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to popupmenu1 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB

```

```

% handles    empty - handles not created until after all CreateFcns
called

% Hint: popupmenu controls usually have a white background on Windows.
%         See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function edit1_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to edit1 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns contents of edit1 as text
%         str2double(get(hObject,'String')) returns contents of edit1
as a double

% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function edit1_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to edit1 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    empty - handles not created until after all CreateFcns
called

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
%         See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

```

```

function edit2_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject      handle to edit2 (see GCBO)
% eventdata    reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles      structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns contents of edit2 as text
%         str2double(get(hObject,'String')) returns contents of edit2
as a double

% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function edit2_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject      handle to edit2 (see GCBO)
% eventdata    reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles      empty - handles not created until after all CreateFcns
called

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
%         See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUiControlBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
function edit3_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject      handle to edit3 (see GCBO)
% eventdata    reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles      structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns contents of edit3 as text
%         str2double(get(hObject,'String')) returns contents of edit3
as a double

% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function edit3_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject      handle to edit3 (see GCBO)
% eventdata    reserved - to be defined in a future version of MATLAB

```

```

% handles    empty - handles not created until after all CreateFcns
called

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
%         See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

% --- Executes on button press in pushbutton1.
function pushbutton1_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to pushbutton1 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)
axes(handles.axes1);
cla reset;

function edit4_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to edit4 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns contents of edit4 as text
%         str2double(get(hObject,'String')) returns contents of edit4
as a double

% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function edit4_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to edit4 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    empty - handles not created until after all CreateFcns
called

```

```
% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.  
%       See ISPC and COMPUTER.  
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),  
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))  
    set(hObject,'BackgroundColor','white');  
end
```